Física III - 4323203

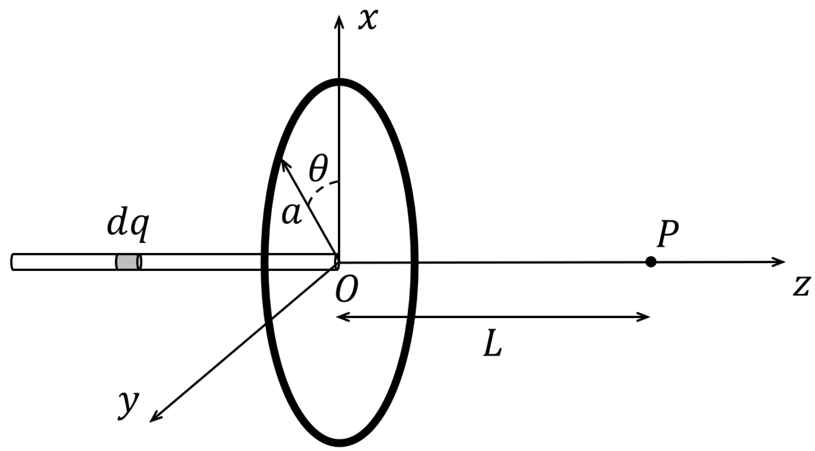
Escola Politécnica - 2024

GABARITO DA P1

11 de abril de 2024

Questão 1

A figura abaixo mostra um fio semi-infinito com densidade linear de carga $\lambda_0 > 0$, contido no semi-eixo z negativo. Na mesma figura também é mostrado um anel de raio a e densidade linear de carga $-\lambda_0 < 0$, contido no plano $z = 0$, com centro em $(0, 0, 0)$.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelo fio no ponto P, situado a uma distância L da extremidade.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico produzido pelo anel no ponto P.

(c) (0,5 ponto) Em que ponto $P = (0, 0, L)$ do eixo z a força sobre uma carga Q produzida pelos campos do fio e do anel será nula? (Encontre apenas a equação, em função de L, que deve ser satisfeita. Não é preciso resolvê-la!)

(d) (1,0 ponto) Considere agora que o anel possua uma densidade de carga não homogênea, dada por $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin^2 \theta$, onde o ângulo θ é medido a partir do eixo x. Calcule a carga contida em todo o anel.

Solução da questão 1

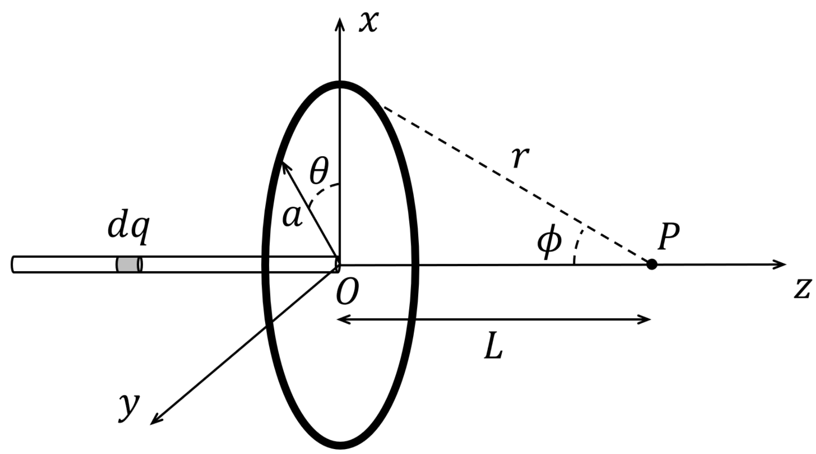
(a) O campo elétrico produzido pelo fio é

$$\vec{E}_{fio} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda_0 dz}{(L-z)^2}\,\hat{k} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L}\,\hat{k}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{E}_{fio} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L}\,\hat{k}}$$

(b) Para calcular o campo elétrico produzido pelo anel, vamos assumir que r é a distância entre o elemento de carga dq e o ponto P e que ϕ é o ângulo formado entre o eixo z e a reta que vai do ponto P até um elemento de carga dq do anel, conforme a figura abaixo.



Logo, o campo produzido pelo anel é

$$\vec{E}_{anel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\cos\phi\,\hat{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\phi}{r^2}\int dq\,\hat{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\phi}{r^2}(-2\pi a\lambda_0)\,\hat{k}$$

Usando $r^2 = L^2 + a^2$ e $\cos\phi = L/\sqrt{L^2+a^2}$, obtemos:

$$\boxed{\vec{E}_{anel} = -\frac{a\lambda_0}{2\epsilon_0}\frac{L}{(L^2+a^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

(c) A força sobre uma carga Q será nula quando o campo elétrico resultante $\vec{E}_{fio} + \vec{E}_{anel}$ for nulo:

$$\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L}\,\hat{k} - \frac{a\lambda_0}{2\epsilon_0}\frac{L}{(L^2+a^2)^{3/2}}\hat{k} = 0.$$

Portanto, L deve ser tal que

$$\boxed{\frac{2\pi a L^2}{(L^2+a^2)^{3/2}} = 1}$$

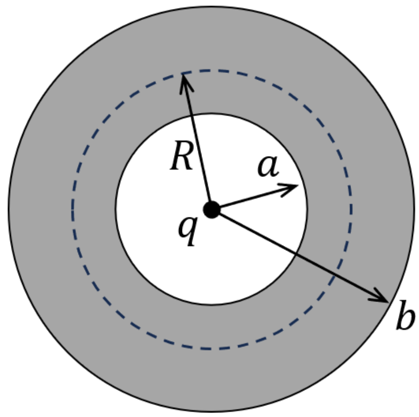
(d) A carga total Q contida no anel é calculada através de

$Q = \int dq = \int \lambda dl = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \sin^2\theta (a d\theta) = \lambda_0 a \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \Rightarrow$

$Q = \lambda_0 a \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \lambda_0 a \ \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \Rightarrow \boxed{Q = \lambda_0 a \pi}$

Questão 2

Considere uma camada esférica de raio interno a e raio externo b como mostrado na figura. Na região $a < r < b$, a camada esférica é constituída por uma material isolante e possui uma carga total Q, positiva, que está uniformemente distribuída em todo seu volume. Uma carga pontual q, positiva, é colocada no centro da cavidade esférica.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico a uma distância r do centro da esfera, onde $r < a$ (dentro da cavidade).

(b) (1,0 ponto) A uma distância R do centro da cavidade, a carga da camada isolante é distribuída uniformemente de modo que $(1/3)Q$ está contida na região $a < r < R$ enquanto que $(2/3)Q$ está contida na região $R < r < b$. Determine o vetor campo elétrico a uma distância R do centro. Expresse sua resposta em termos de R, q, Q, e de eventuais constantes universais.

(c) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico a uma distância r do centro da esfera, onde $r > b$.

(d) (0,5 ponto) Suponha agora que a camada esférica original seja substituída por uma camada condutora de mesmas dimensões, ainda contendo uma carga total Q, em equilíbrio eletrostático. Qual é o vetor campo elétrico no interior dessa camada? Justifique sua resposta!

(e) (0,5 ponto) Na situação do item (d), qual é a carga na superfície externa da esfera com raio $r = b$?

Solução da questão 2

(a) Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio $r < a$ contendo apenas a carga pontual q, temos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oint EdA = E \oint dA = EA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

(b) Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio R tal que $a < R < b$ e que $(1/3)Q$ esteja contida na região $a < r < R$, a carga total dentro da superfície gaussiana é

$q_{int} = q + Q/3$

Utilizando então a lei de Gauss, encontramos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \oint EdA = E \oint dA = EA = E(4\pi R^2) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E(4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} + \frac{Q}{3\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left[q + \frac{Q}{3}\right]\hat{r}}$$

(c) Considerando uma superfície gaussiana esférica de raio $r > b$ contendo a carga pontual q e a carga total Q. Temos

$$E(r) = \frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \left(\frac{q+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)\hat{r}}$$

(d) O campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é zero. Portanto:

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

(e) Se a esfera é condutora, $E(r) = 0$ para $a < r < b$. Uma superfície gaussiana esférica de raio r tal que $a < r < b$, contem a carga pontual q e a carga q_1 induzida na superfície interna em $r = a$. Mas o fluxo elétrico por essa superfície é nulo, dado que $E = 0$ em toda a superfície. Portanto a carga total contida na superfície gaussiana deve ser nula, ou seja $q + q_1 = 0$, o que implica $q_1 = -q$.

Como a carga total Q deve conter a carga q_1 em $r = a$ e a carga q_2 em $r = b$, temos $Q = q_1 + q_2 = -q + q_2$, ou seja

$\boxed{q_2 = q + Q}$

Questão 3

Uma distribuição de cargas elétricas produz um campo elétrico $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$, com:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\alpha r^2}{R^4}\,, & r < R \\ \\ \dfrac{\alpha}{r^2}\,, & r > R \end{cases}$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\alpha > 0$.

(a) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico $V(r)$ para $r > R$. Considere $V(r = \infty) = 0$.

(b) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico $V(r)$ para $r < R$.

Solução da questão 3

(a)

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty E(r')dr' = \int_r^\infty \frac{\alpha}{r'^2}dr' = -\frac{\alpha}{r'}\Big|_r^\infty \Rightarrow$$

$$\boxed{V(r) = \frac{\alpha}{r}}$$

(b) A partir da solução do item (a), temos $V(R) = \alpha/R$. Logo

$$V(r) - V(R) = \int_r^R E(r')dr' = \int_r^R \frac{\alpha r'^2}{R^4}dr' = \frac{\alpha r'^3}{3R^4}\Big|_r^R = \frac{\alpha}{3R} - \frac{\alpha r^3}{3R^4}$$

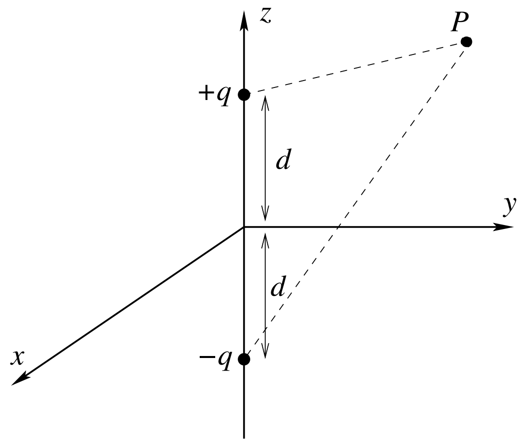
e encontramos

$$V(r) = \frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha}{3R} - \frac{\alpha r^3}{3R^4} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{V(r) = \frac{4\alpha}{3R} - \frac{\alpha r^3}{3R^4} = \frac{\alpha}{3R}\left[4 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right]}$$

Questão 4

A figura abaixo mostra duas cargas pontuais $+q$ e $-q$, situadas em $(0, 0, d)$ e $(0, 0, -d)$, respectivamente.



(a) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico produzido pelas cargas num ponto do espaço com coordenadas (x, y, z).

(b) (0,5 ponto) Qual é o potencial elétrico sobre o eixo x ?

Solução da questão 4

(a) O potencial no ponto P é a soma dos potenciais produzidos por $+q$ e $-q$, ou seja

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{1/2}}\right\}}$$

(b) No eixo x, temos $z = y = 0$, portanto,

$$V(x,0,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+d^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2+d^2]^{1/2}}\right\} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{V(x,0,0) = 0}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'\vec{r}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{r}dq}{|\vec{r}|^3},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}},$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}, \quad \int \mathrm{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen} 2x}{4}$$