Física III - 4323203

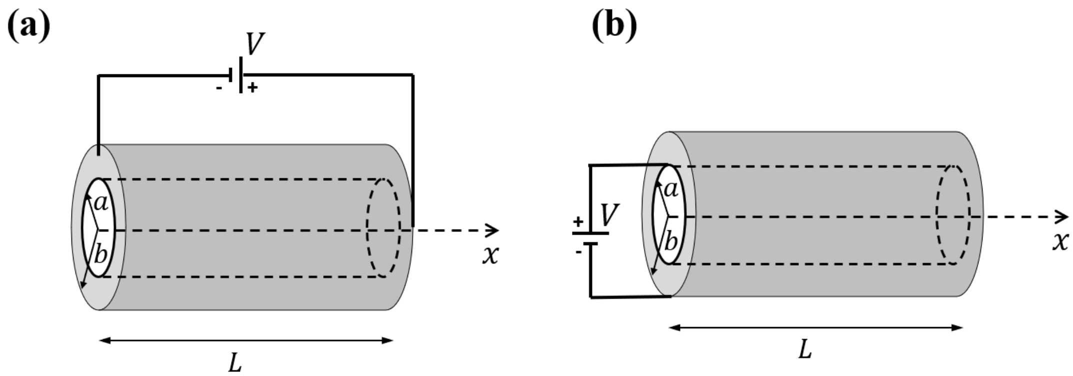
Escola Politécnica - 2024

GABARITO DA P2

16 de maio de 2024

Questão 1

Considere um resistor cilíndrico de raio $r = b$ constituído de um material de resistividade ρ. O resistor possui uma cavidade cilíndrica de raio $r = a$ que se estende ao longo de todo seu comprimento L.



(a) (1,0 ponto) Calcule a resistência do resistor para passagem de corrente elétrica no caso de uma diferença de potencial $V = V_L - V_0 > 0$ ser aplicada entre suas extremidades direita e esquerda, conforme ilustrado na figura (a).

(b) (1,0 ponto) Calcule a resistência do resistor para passagem de corrente elétrica no caso de uma diferença de potencial $V = V_a - V_b > 0$ ser aplicada entre a superfície interna em $r = a$ e a superfície externa $r = b$, conforme ilustrado na figura (b).

(c) (1,0 ponto) Na situação da figura (b), calcule o vetor densidade de corrente em função da distância r, da diferença de potencial V e demais parâmetros, onde r é contada a partir do centro da cavidade cilíndrica.

(d) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico no interior do condutor na situação da figura (b).

Solução da questão 1

(a) $R = \int dR = \rho \int\limits_0^L \dfrac{dl}{\pi(b^2 - a^2)} \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{\rho L}{\pi(b^2 - a^2)}}$

(b) $R = \int dR = \rho \int\limits_a^b \dfrac{dr}{2\pi r L} = \dfrac{\rho}{2\pi L} \ln(b/a) \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{\rho}{2\pi L} \ln(b/a)}$

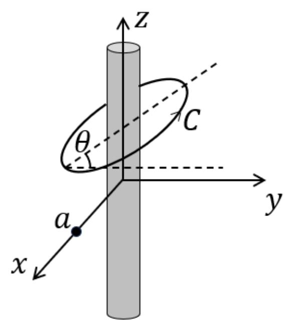
(c) $I = J(r)A(r) \Rightarrow \dfrac{V}{R} = J(r)(2\pi r L) \Rightarrow J(r) = \dfrac{V}{\rho \ln(b/a)} \dfrac{1}{r} \Rightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \dfrac{V}{\rho \ln(b/a)} \dfrac{1}{r} \hat{r}}$

(d) $\vec{E} = \rho \vec{J} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \dfrac{V}{\ln(b/a)} \dfrac{1}{r} \hat{r}}$

Questão 2

Parte I

Considere um fio condutor infinito de raio b, percorrido por uma densidade uniforme de corrente $\vec{J} = J\hat{k}$. O fio encontra-se posicionado ao longo do eixo z, como mostrado na figura.

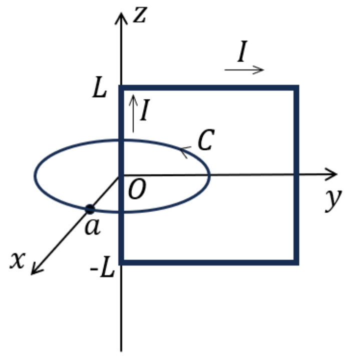


(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético no ponto $P = (a, 0, 0)$, sendo $a > b$. Expresse sua resposta em termos de $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

(b) (0,5 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo da curva fechada C, que está centrada no fio e apoida em um plano formando um ângulo θ em relação ao eixo y, como indicado na figura.

Parte II

Considere agora um circuito quadrado feito de um fio condutor de espessura desprezível, percorrido por uma corrente estacionária I. O comprimento de cada lado do circuito é $2L$. Um dos lados do circuito se encontra posicionado simetricamente ao longo do eixo z, como mostrado na figura.



(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético no ponto $P = (a, 0, 0)$, devido apenas ao segmento retilíneo vertical que coincide com o eixo z. Expresse sua resposta em termos de $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$.

(d) (0,5 ponto) Determine a integral de linha do campo magnético ao longo da curva fechada C de raio a, que está centrada no fio, como indicado na figura.

Solução da questão 2

(a) Utilizando a lei de Ampère, temos:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow B(2\pi a) = \mu_0 J(\pi b^2) \Rightarrow B = \frac{\mu_0 J b^2}{2a} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J b^2}{2a}\hat{j}}$$

(b) $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 J \pi b^2}$

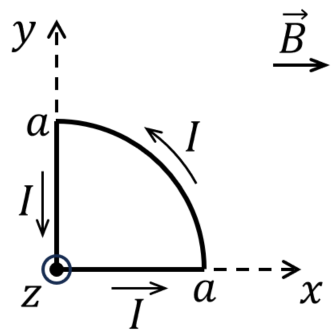
(c) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L} \frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L} \frac{(dz\hat{k})\times(a\hat{i}-z\hat{k})}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-L}^{L} \frac{adz\hat{j}}{(a^2+z^2)^{3/2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi a\sqrt{a^2+L^2}}\hat{j}}$$

(d) $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I}$

Questão 3

Uma espira é formada por dois segmentos de reta de comprimento a e um trecho semicircular de raio a, conforme ilustrado na figura. A espira está sujeita a um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = B\hat{i}$, sendo $B > 0$ e a corrente percorre a espira no sentido indicado na figura. (Dica: O elemento de linha infinitesimal na semi-circunferência é dado por $d\vec{l} = -a\,\text{sen}\theta d\theta\hat{i} + a\cos\theta d\theta\hat{j}$, onde o ângulo θ é medido a partir do eixo x).



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética $\vec{F}_h$ e $\vec{F}_v$ que atuam, respectivamente, sobre os segmentos retilíneos horizontal e vertical.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor força magnética sobre o trecho circular.

(c) (0,5 ponto) Calcule o torque sobre a espira.

(d) (0,5 ponto) Qual a direção de $\vec{B}$ produziria torque nulo na espira? Explique!

$\boxed{\text{Solução da questão 3}}$

(a) Segmento retilíneo horizontal:

$$\vec{F}_h = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B} = I \int\limits_0^{+a} (dx\hat{\imath}) \times (B\hat{\imath}) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_h = 0}$$

Segmento retilíneo vertical:

$$\vec{F}_v = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B} = I \int\limits_0^{+a} (-dy\hat{\jmath}) \times (B\hat{\imath}) = IaC\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_v = IaB\hat{k}}$$

(b) No trecho circular, a força é dada por:

$$\vec{F}_c = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B} = I \int\limits_0^{\pi/2} (-a\,\text{sen}\theta d\theta\hat{\imath} + a\cos\theta d\theta\hat{\jmath}) \times (B\hat{\imath}) = -IBa\hat{k} \int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F}_c = -IaB\hat{k}}$$

Solução alternativa: A força total produzida por um campo magnético uniforme em uma espira fechada é zero. Logo a força $\vec{F}_c$ sobre o trecho circular pode ser obtida através de:

$$\vec{F}_h + \vec{F}_v + \vec{F}_c = 0 \Rightarrow \vec{F}_c = -\vec{F}_h - \vec{F}_v = -IaB\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_c = -IaB\hat{k}}$$

(c) O torque pode ser calculado através de:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{I\pi a^2\hat{k}}{4} \times (B\hat{\imath}) \Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \frac{I\pi Ba^2}{4}\hat{\jmath}}$$

(d) O torque é nulo quando o campo magnético é paralelo ao vetor momento de dipolo magnético, ou seja:

$\boxed{\hat{n} = \hat{k}}$ ou $\boxed{\hat{n} = -\hat{k}}$

Formulário

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad R = \int dR, \quad V = RI, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B},$$

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}}, \quad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}}.$$