Física III - 4323203

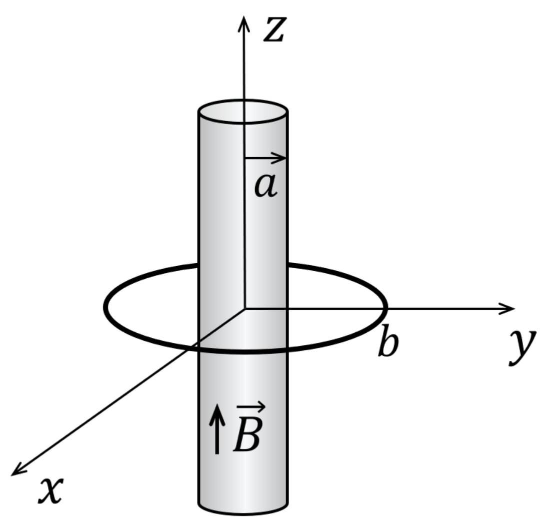
Escola Politécnica - 2024

GABARITO DA P3

20 de junho de 2024

Questão 1

O campo magnético no interior de uma região cilíndrica muito longa de raio a, mostrada na figura, é uniforme em todos os pontos e é dado por $\vec{B} = B_0\,(1 + t/\tau)\,\hat{k}$, onde B_0 e τ são constantes positivas e t é o tempo. Fora da região cilíndrica, $\vec{B}$ é nulo.



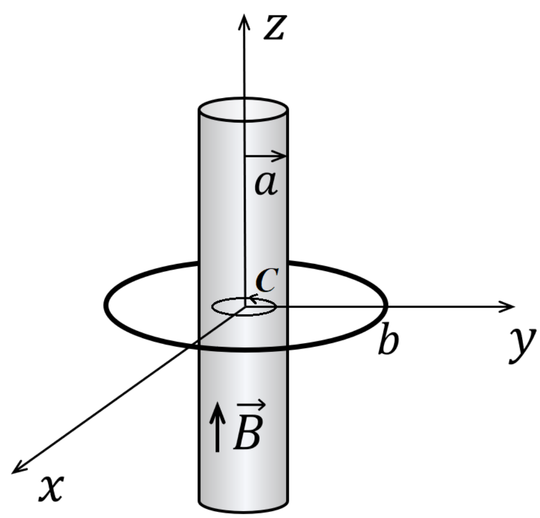
(a) (1,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico induzido no interior da região cilíndrica, ou seja, em um ponto P qualquer, a uma distância $r < a$ do eixo z.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico induzido no exterior da região cilíndrica, ou seja, em um ponto P qualquer, a uma distância $r > a$ do eixo z.

(c) (1,0 ponto) Suponha que uma espira circular de resistência R e raio $b > a$ seja posicionada paralelamente ao plano xy de forma a ficar concêntrica à região cilíndrica. Determine a corrente elétrica induzida na espira.

Solução da questão 1

(a) Considerando uma curva circular fechada C de raio $r < a$ orientada conforme a figura abaixo, temos:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow E(2\pi r) = -\frac{d}{dt} \left[B_0 \left(1 + t/\tau\right) \left(\pi r^2\right)\right] \Rightarrow$$

$$E(2\pi r) = -\frac{B_0}{\tau}(\pi r^2) \Rightarrow E = -\frac{B_0}{2\tau} r \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{B_0}{2\tau} r\hat{\phi}}$$

(b) $$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow E(2\pi r) = -\frac{d}{dt} \left[B_0 \left(1 + t/\tau\right) \left(\pi a^2\right)\right] \Rightarrow$$

$$E(2\pi r) = -\frac{B_0}{\tau}(\pi a^2) \Rightarrow E = -\frac{B_0 a^2}{2\tau r} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{B_0 a^2}{2\tau r}\hat{\phi}}$$

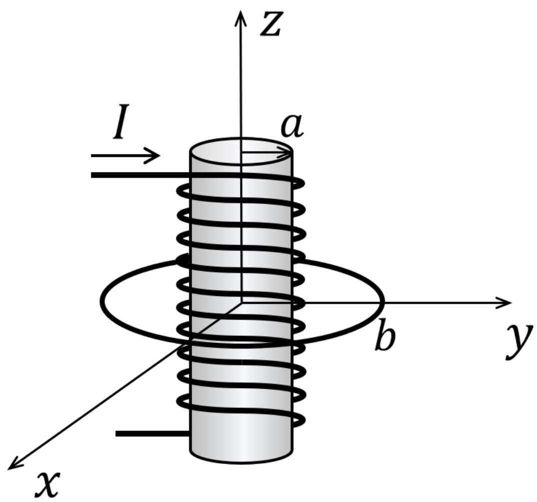
(c) $$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d}{dt} \left[B_0 \left(1 + t/\tau\right) \left(\pi a^2\right)\right] \Rightarrow \varepsilon = -\frac{B_0}{\tau}(\pi a^2)$$

Utilizando a lei de Ohm, temos:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{B_0}{R\tau}(\pi a^2)}$$

Questão 2

Um solenóide de raio a e altura $h \gg a$ possui N espiras. Em torno do solenóide, há uma espira circular de raio $b > a$, conforme ilustrado na figura. Dado: O campo magnético no interior do solenóide é $\vec{B} = (\mu_0 I N/h)\hat{k}$, onde I é a corrente.



(a) (1,0 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide.

(b) (0,5 ponto) Calcule a energia magnética no interior do solenóide.

(c) (1,0 ponto) Calcule a indutância mútua entre o solenóide e a espira.

(d) (0,5 ponto) Considerando que no solenóide passa uma corrente $I = Ct$, sendo $C > 0$ e t o tempo, calcule o módulo da força eletromotriz induzida na espira.

Solução da questão 2

(a) $\Phi_{\text{total}} = LI \Rightarrow L = \dfrac{\Phi_{\text{total}}}{I} \Rightarrow L = \dfrac{B\pi a^2 N}{I} = \dfrac{\mu_0 I N \pi a^2 N}{hI} \Rightarrow \boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{h}}$

(b) $U = \frac{1}{2} L I^2 \Rightarrow \boxed{U = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi a^2 I^2}{2h}}$

(c) $\Phi_{\text{total}} = MI \Rightarrow M = \dfrac{\Phi_{\text{total}}}{I} \Rightarrow M = \dfrac{B\pi a^2}{I} = \dfrac{\mu_0 I N \pi a^2}{hI} \Rightarrow \boxed{M = \dfrac{\mu_0 N \pi a^2}{h}}$

(d) $|\varepsilon| = \left| -\dfrac{d\Phi_B}{dt} \right| \Rightarrow |\varepsilon| = \left| -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mu_0 I N}{h} \pi a^2 \right) \right| \Rightarrow |\varepsilon| = \left| -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mu_0 C t N}{h} \pi a^2 \right) \right| \Rightarrow$

$\boxed{|\varepsilon| = \dfrac{\mu_0 C N}{h} \pi a^2}$

Questão 3

O campo magnético de uma onda eletromagnética plana se propagando no vácuo é dado por:

$$\vec{B} = B_0 \cos\left[kz - \omega t\right] \hat{j}$$

(a) (0,5 ponto) Qual a direção e o sentido de propagação da onda?

(b) (1,0 ponto) Obtenha a expressão do vetor campo elétrico correspondente.

(c) (1,0 ponto) Determine o vetor de Poynting desta onda.

(d) (1,0 ponto) Obtenha a expressão que representa a intensidade desta onda, ou seja, o valor médio da potência por unidade de área que a onda carrega.

Solução da questão 3

(a) $\boxed{\text{Direção } z\text{, viajando no sentido de } z \text{ positivo}}$

(b) $\vec{B} = \dfrac{\hat{c} \times \vec{E}}{c} \Rightarrow B_0 \cos\left[kz - \omega t\right] \hat{j} = \dfrac{\hat{k} \times \vec{E}}{c} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = cB_0 \cos\left[kz - \omega t\right] \hat{i}}$

(c) $\vec{S} = \dfrac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{\left[cB_0 \cos\left(kz - \omega t\right) \hat{i}\right] \times \left[B_0 \cos\left(kz - \omega t\right) \hat{j}\right]}{\mu_0} \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{cB_0^2 \cos^2\left(kz - \omega t\right) \hat{k}}{\mu_0}}$$

(d) $I = |\langle \vec{S} \rangle| = \boxed{\dfrac{cB_0^2}{2\mu_0}}$

Formulário

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \Phi^{total} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = M_{21} I_1 = M I_1, \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad \vec{B} = \frac{\hat{c} \times \vec{E}}{c},$$

$$\vec{E} = E_m \cos(kx \pm \omega t + \phi) \hat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m \cos(kx \pm \omega t + \phi) \hat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\, c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\, B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx - \omega t + \phi) > = < \operatorname{sen}^2(kx - \omega t + \phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx - \omega t + \phi) \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) > = 0,$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Dado um campo vetorial $\vec{A} = A_x \hat{\imath} + A_y \hat{\jmath} + A_z \hat{k}$, o rotacional do campo é dado por:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \widehat{\imath} & \widehat{\jmath} & \widehat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$