Física III - 4323203

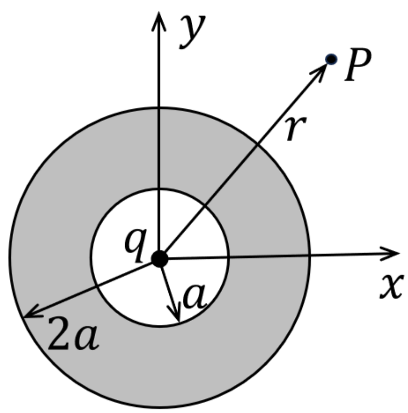
Escola Politécnica - 2023

GABARITO DA REC

11 de julho de 2024

Questão 1

Uma camada esférica condutora de raio interno a e raio externo $2a$ está centrada na origem do sistema de coordenadas, como mostra a figura abaixo. A carga total na camada esférica é zero e na origem do sistema de coordenadas há uma carga puntiforme q, positiva.



(a) (0,5 ponto) Use a lei de Gauss para calcular a carga total contida na superfície interna da camada esférica condutora.

(b) (1,0 ponto) Calcule a densidade superficial de carga na superfície externa da camada esférica.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em um ponto P exterior à esfera.

Solução da questão 1

(a) Considerando uma superfície gaussiana que engloba a cavidade e está contida no interior do condutor, e em seguida levando em conta que o campo elétrico é nulo no interior do condutor, a lei de Gauss nos diz que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 = \frac{q + q_{\text{total}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{q_{\text{total}} = -q}$$

(b) Como a carga se distribui sempre na superfície do condutor e a esfera está descarregada, concluímos (usando o resultado do item anterior) que a carga na superfície externa é $+q$. Logo a densidade superficial de carga é:

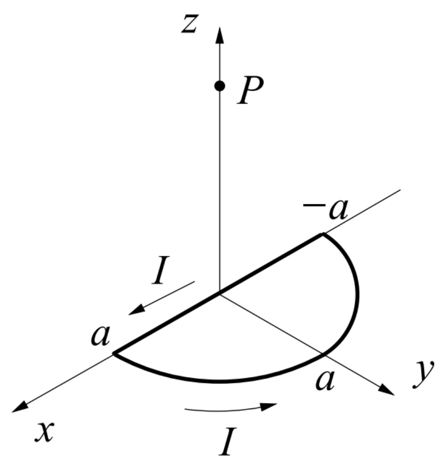
$$\boxed{\sigma = \frac{q}{16\pi a^2}}$$

(c) Considerando uma superfície gaussiana em formato esférico, com raio r, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

Questão 2

Uma espira é formada por um trecho circular de raio a e um trecho reto de comprimento $2a$, conforme ilustrado na figura abaixo. Pela espira, passa uma corrente I, no sentido indicado na figura. Dica: Para o trecho semicircular, o vetor infinitesimal $d\vec{\ell}$ é dado por $d\vec{\ell} = -a\,\text{sen}\theta d\theta\hat{\imath} + a\cos\theta d\theta\hat{\jmath}$, onde o ângulo θ é medido a partir do eixo x.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo trecho reto no ponto $P = (0, 0, z)$. Expresse sua sua resposta na forma cartesiana.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo trecho semicircular no ponto $P = (0, 0, z)$. Expresse sua sua resposta na forma cartesiana.

(c) (0,5 ponto) Qual é a força magnética resultante sobre a espira se a espira for submetida a um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = B_0\hat{k}$?

Solução da questão 2

(a) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \int \dfrac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$, sendo

$\vec{r} = -x\hat{i} + z\hat{k}$,

$\hat{r} = \dfrac{-x\hat{i} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + z^2}}$,

$r = \sqrt{x^2 + z^2}$, e

$d\vec{\ell} = dx\hat{i}$.

Logo:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-a}^{+a} \frac{(dx\hat{i}) \times (-x\hat{i} + z\hat{k})}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-a}^{+a} \frac{-z dx\hat{j}}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{z\sqrt{a^2 + z^2}}\hat{j}}$$

(b) $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \int \dfrac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$, sendo

$\vec{r} = -a\cos\theta\hat{i} - a\,\mathrm{sen}\theta\hat{j} + z\hat{k}$,

$\hat{r} = \dfrac{-a\cos\theta\hat{i} - a\,\mathrm{sen}\theta\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$,

$r = \sqrt{a^2 + z^2}$, e

$d\vec{\ell} = -a\,\mathrm{sen}\theta d\theta\hat{i} + a\cos\theta d\theta\hat{j}$.

Logo:

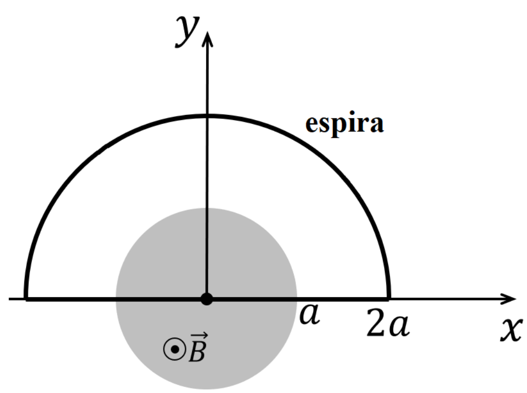
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{(-a\,\mathrm{sen}\theta d\theta\hat{i} + a\cos\theta d\theta\hat{j}) \times (-a\cos\theta\hat{i} - a\,\mathrm{sen}\theta\hat{j} + z\hat{k})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{az\cos\theta d\theta\hat{i} + az\,\mathrm{sen}\theta\hat{j} + a^2 d\theta\hat{k}}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{(2az\hat{j} + \pi a^2\hat{k})}{(a^2 + z^2)^{3/2}}}$$

(c) A força resultante sobre a espira produzida por um campo magnético uniforme é zero. Portanto $\boxed{\vec{F} = 0}$

Questão 3

Em uma região cilíndrica de raio a e comprimento infinito na direção z (região cinza na figura) há um campo magnético uniforme dado por $\vec{B} = Dt\hat{k}$, onde $D > 0$ e t é o tempo. Uma espira de resistência R formada por um trecho semicircular de raio $2a$ e por um trecho retilínio de comprimento $4a$ é posicionada sobre o plano xy, conforme indicado na figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto P, localizado a uma distância r do centro da região cilíndrica, sendo $0 < r < a$.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto P, localizado a uma distância r do centro da região cilíndrica, sendo $r > a$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a corrente induzida na espira.

(d) (0,5 ponto) Determine o sentido da corrente induzida na espira. Justifique sua resposta!

Solução da questão 3

(a) Considerando uma curva fechada C de raio r, temos:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow E2\pi r = -\frac{d}{dt}\left(Dt\pi r^2\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{Dr}{2}\hat{\theta}}$$

(b) Considerando uma curva fechada C de raio r, temos:

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow E2\pi r = -\frac{d}{dt}\left(Dt\pi a^2\right) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{Da^2}{2r}\hat{\theta}}$$

(c) Utilizando a Lei de Farday, temos:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{D\pi a^2}{2}$$

Logo:

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} \Rightarrow \boxed{I = \frac{D\pi a^2}{2R}}$$

(d) De acordo com a Lei de Lenz, o sentido da corrente induzida deve ser tal que produza uma campo magnético de modo a tentar impedir que o campo magnético na região cinza aumente. Logo:

$\boxed{\text{sentido horário!}}$

Questão 4

Considere uma onda eletromagnética plana que se propaga no vácuo com campo elétrico dado por $\vec{E} = E_0 \cos[kz - \omega t]\hat{i}$, onde $E_0 > 0$ é a amplitude da onda, k é o número de onda, e ω é a frequencia angular.

(a) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo magnético desta onda. Expresse sua resposta em termos de E_0, c, e demais informações contidas no enunciado.

(b) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> de Poynting $\vec{S}$ e o seu valor médio $< \vec{S} >$.

(c) (0,5 ponto) Considerando uma superfície plana de área A, paralela ao plano xz, calcule a energia que atravessa a superfície durante um intervalo de tempo correspondente a 1 período da onda.

Solução da questão 4

(a) Temos $\vec{B} = \hat{c} \times \vec{E}/c$ e $\hat{c} = \hat{k}$, logo $\boxed{\vec{B} = \dfrac{E_0}{c}\cos[kz - \omega t]\hat{j}}$

(b) $\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{S} = \dfrac{E_0^2}{c\mu_0}\cos^2[kz - \omega t]\hat{k}}$.

$\boxed{< \vec{S} >= \dfrac{E_0^2}{2c\mu_0}\hat{k}}$.

(c) Como a onda viaja no sentido de z positivo e a superfície é paralela ao plano xz, a onda não atravessa a superfície, logo a energia total é zero. Portanto:

$\boxed{U = 0}$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},\qquad V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad dA=2\pi r dr(\text{coordenadas}\quad\text{polares})$$

$$C=Q/V,\quad W=q\Delta V,\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},\quad \Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,\ \ u_m=\frac{B^2}{2\mu_0},\ \ U=\frac{LI^2}{2},$$

$$\oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad I=\int\vec{J}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad \vec{B}=\frac{\hat{c}\times\vec{E}}{c},$$

$$\vec{E}=E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\hat{\jmath},\quad \vec{B}=B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{k},\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T},\quad k\,c=\omega,$$

$$f=1/T,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0},\quad I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$<\cos^2(kx-\omega t+\phi)>=<\operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi)>=1/2,\quad <\cos(kx-\omega t+\phi)\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi)>=0.$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\quad \cos A-\cos B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A+\sin B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right),\quad \hat{r}=\cos\theta\hat{\imath}+\operatorname{sen}\theta\hat{\jmath},\quad \hat{\theta}=-\operatorname{sen}\theta\hat{\imath}+\cos\theta\hat{\jmath}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}),\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int\frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}}=\frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$