Física III - 4323203

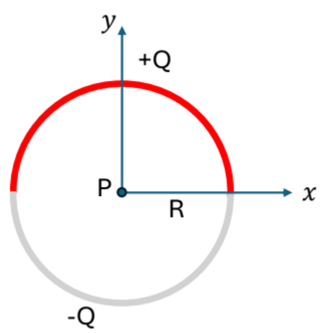
Escola Politécnica - 2024

GABARITO DA SUB

27 de junho de 2024

Questão 1

Metade de um anel isolante de raio R é carregado com carga $+Q$, enquanto a outra metade possui carga $-Q$. Em ambas as partes, a carga está uniformemente distribuída.



(a) (0,5 ponto) Calcule a densidade linear de carga da metade positiva no anel.

(b) (1,0 ponto) Calcule o potencial elétrico no ponto P, localizado no centro do anel.

(c) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo elétrico no ponto P, localizado no centro do anel.

Solução da questão 1

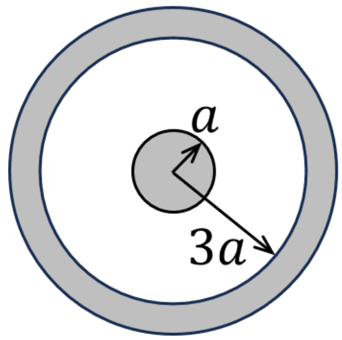
(a) $\lambda = \dfrac{Q}{\pi R} \Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{Q}{\pi R}}$

(b) $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{dq}{r} \Rightarrow V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\lambda R d\theta}{R} - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\lambda R d\theta}{R}\right] \Rightarrow V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\lambda\pi - \lambda\pi\right] = 0 \Rightarrow$
$\boxed{V = 0}$

(c) $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \dfrac{dq}{r^2}\hat{r} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\limits_0^{\pi} \dfrac{\lambda R d\theta}{R^2}(-\cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j}) - \int\limits_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\lambda R d\theta}{R^2}(-\cos\theta\hat{i} - \text{sen}\theta\hat{j})\right] \Rightarrow$
$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\dfrac{2\lambda}{R}\hat{j} - \dfrac{2\lambda}{R}\hat{j}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\dfrac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 R}\hat{j} = -\dfrac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}\hat{j}}$

Questão 2

Um capacitor esférico é formado por uma esfera condutora de raio a e por uma camada esférica condutora de raio interno $3a$, conforme ilustrado na figura. Considerando que a esfera interna está carregada com uma carga $+q$ e a camada esférica externa está carregada com carga $-q$, calcule:



(a) (1,0 ponto) O vetor campo elétrico nas regiões $r < a$ e $a < r < 3a$, sendo r a coordenada radial.

(b) (1,0 ponto) A capacitância do capacitor.

(c) (0,5 ponto) A capacitância do capacitor se o espaço entre $r = a$ e $r = 3a$ for preenchido com um material de constante dielétrica κ.

Solução da questão 2

(a) região $r < a$

Para campos eletrostáticos, o campo elétrico no interior do condutor é zero. Portanto:

$\boxed{\vec{E} = 0}$

região $a < r < 3a$

Utilizando a lei de Gauss, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = q_{int}/\varepsilon_0 \Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}}$$

(b) A diferença de potencial entre a esfera condutora interna e a camada esférica condutora externa é

$$\Delta V = -(V_b - V_a) = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^{3a} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \Delta V = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 a}$$

Logo:

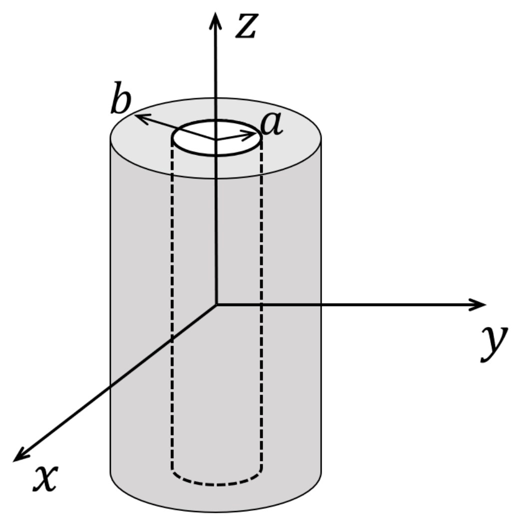
$$C = \frac{q}{\Delta V} \Rightarrow \boxed{C = 6\pi\varepsilon_0 a}$$

(c) Com o dielétrico, a nova capacitância é igual a $C' = \kappa C$. Logo:

$\boxed{C' = 6\pi\varepsilon_0 \kappa a}$

Questão 3

O vetor densidade de corrente que passa por uma casca cilíndrica muito longa de raio interno a e raio externo b é não uniforme e varia de acordo com $\vec{J}(r) = J_0 r \vec{k}$, sendo J_0 uma constante positiva e r a distância a partir do centro do cilindro ao ponto, conforme mostra a figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule a corrente total I que passa pela casca cilíndrica a partir da densidade de corrente $\vec{J}$.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ nas regiões $r < a$ e $r > b$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ na região $a < r < b$.

Solução da questão 3

(a) $I = \int_a^b \vec{J}.d\vec{A} = 2\pi J_0 \int_a^b r^2 dr \Rightarrow \boxed{I = \frac{2\pi J_0}{3}(b^3 - a^3)}$

(b) De acordo com a lei de Ampére, $B = 0$ para $r < a$. Na região $r > b$, temos

$$B.2\pi r = \frac{2\pi J_0 \mu_0}{3}(b^3 - a^3),$$

de onde obtemos

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 (b^3 - a^3)}{3r}\hat{\theta}}.$$

(c) De forma análoga, na região $a < r < b$, a corrente interna/enlaçada é dada por

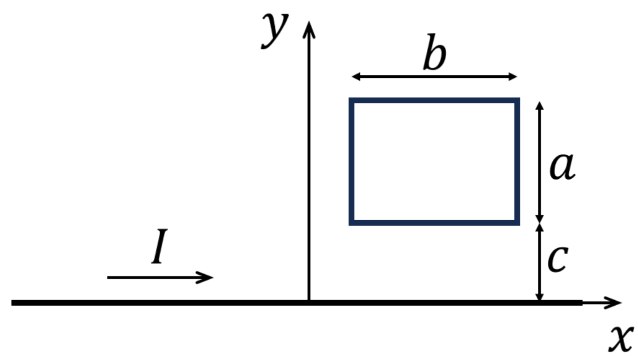
$$\frac{\mu_0 J_0 (r^3 - a^3)}{3},$$

de forma que

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 (r^3 - a^3)}{3r}\hat{\theta}}.$$

Questão 4

Na figura abaixo há um fio infinito transportando uma corrente I, e uma espira retangular de dimensões a e b e resistência R. A espira está localizada a uma distância c do fio, como mostrado na figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo fio infinito ao longo do eixo y para $y > 0$. Expresse sua resposta em termos dos versores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$.

(b) (1,0 ponto) Se a corrente no fio for dada por $I = Ct$, sendo C uma constante positiva e t o tempo, calcule a força eletromotriz induzida na espira.

(c) (0,5 ponto) Na situação do item (b), a corrente induzida na espira será no sentido horário ou anti-horário? Justifique sua resposta.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Logo, ao longo do eixo y, temos:

$$\boxed{\vec{B}(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{k}}$$

(b) O fluxo magnético na espira é:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = b \int_c^{a+c} \frac{\mu_0 I}{2\pi y} dy = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)$$

Utilizando a lei de indução de Faraday, temos:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{\mu_0 C b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+c}{c}\right)}$$

(c) Pelo sinal da força eletromotriz do item (b), conclui-se que a corrente induzida está no sentindo horário. Portanto:

$\boxed{\text{sentido horário}}$

O sentido da corrente induzida também pode ser encontrada a partir da lei de Lenz. Dessa forma, se a corrente no fio aumenta seguindo a expressão $I = Ct$, o fluxo do campo magnético na espira também aumenta. Logo, a corrente induzida na espira deve ser no <u>sentido horário</u> de modo a tentar impedir que o fluxo do campo magnético aumente.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}, \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad dA = 2\pi r dr (\text{coordenadas} \quad \text{polares})$$

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C}, \quad W = q\Delta V, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \;\; u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}, \;\; U = \frac{LI^2}{2},$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}, \quad \vec{B} = \frac{\hat{c}\times\vec{E}}{c},$$

$$\vec{E} = E_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{\jmath}, \quad \vec{B} = B_m\cos(kx\pm\omega t+\phi)\,\widehat{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k\,c = \omega,$$

$$f = 1/T, \quad \vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}, \quad S = uc, \quad u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0\,E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad I = < S > = \frac{E_m\,B_m}{2\mu_0},$$

$$< \cos^2(kx-\omega t+\phi) > = < \operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\phi) > = 1/2, \quad < \cos(kx-\omega t+\phi)\,\operatorname{sen}(kx-\omega t+\phi) > = 0.$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad \cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$\sin A + \sin B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}), \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}.$$

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(bx+c)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{ab^2}}$$