P1

Física III

Escola Politécnica - 2004

FGE 2203 - 1^a AVALIAÇÃO

15 de abril de 2004

◇ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

◇ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

◇ Escreva de forma legível.

◇ É proibido o uso de calculadoras.

◇ Resolva cada questão na folha apropriada.

◇ Não serão aceitas respostas sem justificativas

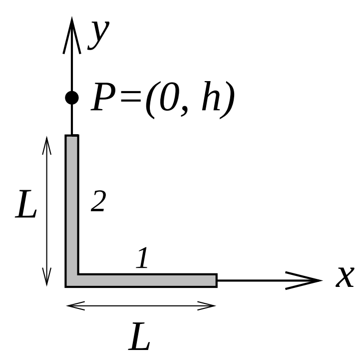
Questão 1

Um condutor formado por duas hastes 1 e 2, cada uma de comprimento L, está num plano (x, y) como é visto na figura abaixo. Uma haste está ao longo do eixo x e a outra ao longo do eixo y. Sobre o condutor há uma carga Q uniformemente distribuída. Pede-se para determinar, no ponto P sobre o eixo y com coordenada $y = h > L$ (veja a figura),

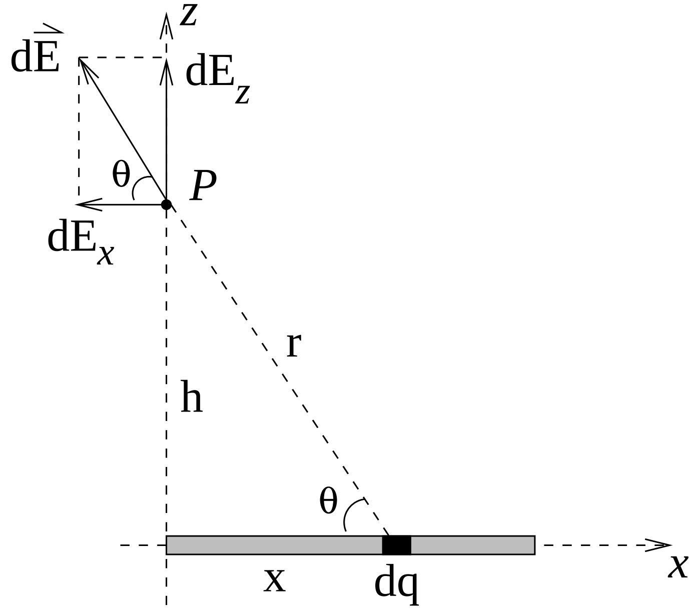
(1,0 ponto) (a) O campo elétrico $\vec{E}^{(1)}(P)$ gerado pela haste 1.

(1,0 ponto) (b) O campo elétrico $\vec{E}^{(2)}(P)$ gerado pela haste 2.

(0.5 ponto) (c) O campo elétrico $\vec{E}(P)$, devido às duas hastes.



(a) Haste 1: $dq = \lambda dx, \quad sen\,\theta = h/r, \quad cos\,\theta = x/r, \quad r = \sqrt{h^2 + x^2}$



$$E_z^{(1)} = \int sen\,\theta\,\frac{\kappa dq}{r^2} = \int_0^L \kappa\lambda h \frac{dx}{(h^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\kappa\lambda}{h}\frac{x}{(h^2+x^2)^{1/2}}\Bigg|_0^L = \frac{\kappa\lambda}{h}\frac{L}{(h^2+L^2)^{1/2}}$$

$$E_x^{(1)} = -\int cos\,\theta\,\frac{\kappa dq}{r^2} = -\int_0^L \kappa\lambda h \frac{x\,dx}{(h^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\kappa\lambda}{(h^2+x^2)^{1/2}}\Bigg|_0^L = \kappa\lambda\left[\frac{1}{(h^2+L^2)^{1/2}} - \frac{1}{h}\right]$$

$$\vec{E}^{(1)} = E_x^{(1)}\,\vec{\imath} + E_z^{(1)}\,\vec{k}$$

(b) Haste 2: $dq = \lambda dy, \quad r = h - y$

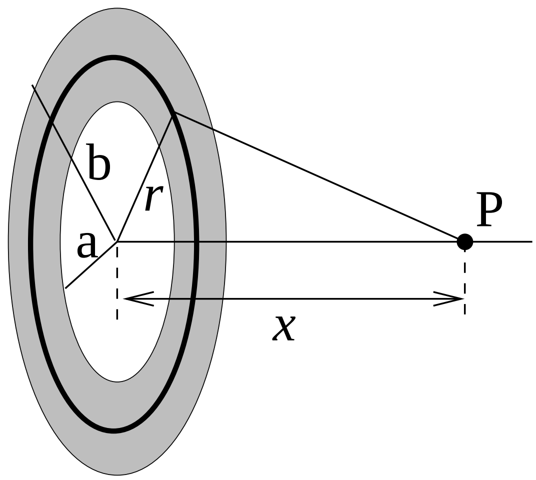
$$E_z^{(2)} = \int \frac{\kappa dq}{r^2} = \int_0^L \kappa\lambda \frac{dy}{(h-y)^2} = \kappa\lambda \frac{1}{h-y}\Bigg|_0^L = \frac{\kappa\lambda L}{(h-L)h}\,, \qquad \vec{E}^{(2)} = E_z^{(2)}\ \vec{k}$$

(c) Campo total: $\vec{E} = E_x^{(1)}\,\vec{\imath} + (E_z^{(1)} + \ E_z^{(2)})\,\vec{k}$

Questão 2

(1,5 ponto) (a) Calcular o potencial elétrico $V(x)$ no ponto P do eixo da coroa circular que aparece na figura abaixo , que tem uma carga Q distribuída uniformemente sobre ela e raios interno e externo iguais a a e b, respectivamente.

(1,0 ponto) (b) Qual é o campo elétrico criado pela coroa no ponto P?



(a) O potencial devido ao anel de raio r e largura dr é dado por

$$dV(x) = 2\pi\kappa\sigma \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow V(x) = 2\pi\kappa\sigma \int_a^b \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{1/2}} = 2\pi\kappa\sigma \sqrt{x^2+r^2}\Big|_a^b = 2\pi\kappa\sigma \left[\sqrt{b^2+x^2} - \sqrt{a^2+x^2}\right]$$

(b) Cálculo do campo

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = 2\pi\kappa\sigma x \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+x^2}}\right]$$

Questão 3

Um fio com $15m$ de comprimento e secção reta circular com diâmetro de $2,5mm$ de metal condutor é usado para transportar correntes. A resistência entre as suas extremidades é de $R = 0,10\,\Omega$.

(0,5 ponto) (a) Qual é a resistividade ρ do material?

(1,0 ponto) (b) Sabendo que o módulo do campo elétrico no interior do condutor é igual a $E = 1,3\,V/m$, qual é a corrente elétrica total I?

(1,0 ponto) (c) Suponha que a resistividade do metal não seja constante e dependa da distância x medida entre os pontos inicial $x = 0$ e final $x = 15m$. Assim, sendo $\rho(x) = Cx$, calcule o valor da constante C para que a resistência do fio seja igual a $R = 0,10\,\Omega$.

Dê suas respostas com 1 algarismo significativo

(a) A resistência R é dada por

$$R = \rho\frac{\ell}{A}, \quad \text{onde} \quad A = \pi(\frac{2,5\times 10^{-3}}{2})^2 \approx 5\times 10^{-6}$$

$$\Longrightarrow \rho = R\frac{A}{\ell} = \frac{0,10\times 5\times 10^{-6}}{15} \approx 3\times 10^{-8}\,\Omega\, m$$

(b) A densidade de corrente J pode ser calculada pela lei de Ohm

$$J = \frac{I}{A} = \sigma E = \frac{E}{\rho} \Longrightarrow I = \frac{AE}{\rho} = \frac{5\times 10^{-6}\times 1,3}{3\times 10^{-8}} \approx 2\times 10^2 A$$

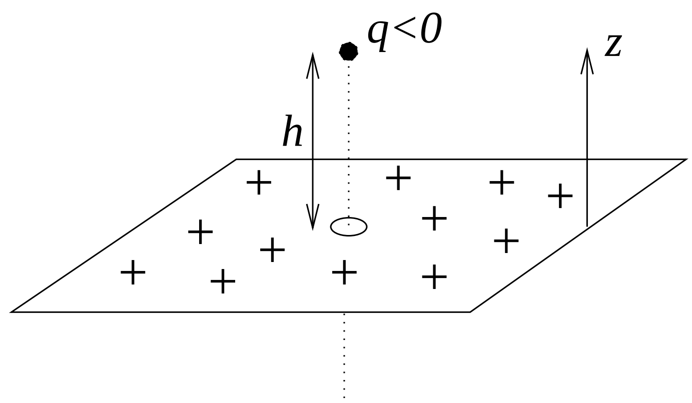
(c) A resistência R é calculada por integração

$$R = \int_0^{15} \frac{\rho(x)dx}{A} = \frac{C}{A}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{15} = \frac{225C}{2A}$$

$$\Longrightarrow C = \frac{2AR}{225} = \frac{2\times 5\times 10^{-6}\times 0,10}{225} \approx 4\times 10^{-9}\,\Omega$$

Questão 4

Considere uma placa isolante infinita com uma densidade superficial de carga $\sigma > 0$, constante. Uma pequena partícula com carga $q < 0$ encontra-se sobre esta placa a uma altura h, conforme mostra a figura. Há um pequeno orifício no plano, diretamente embaixo da partícula. Suponha que os efeitos deste orifício sobre o campo elétrico gerado pela placa sejam desprezíveis.

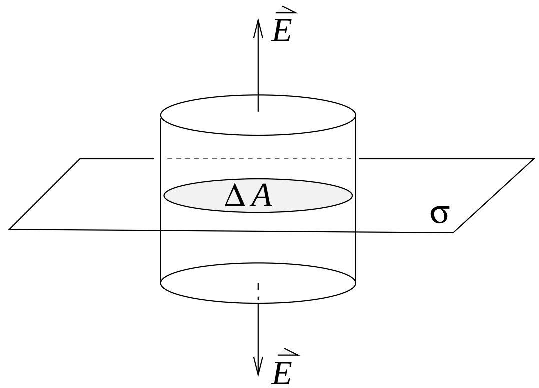


(1,0 ponto) (a) Use a lei de Gauss para calcular o campo elétrico devido à placa infinita em todo e espaço.

(0.5 ponto) (b) Calcule a diferença de energia potencial elétrico entre a posição inicial e a posição em que a partícula atravessa o orifício ($z = 0$).

(1,0 ponto) (c) Faça um esboço do gráfico da velocidade da carga de prova em função do tempo.

(a) Por simetria o campo elétrico é perpendicular ao plano. Utilizaremos a lei de Gauss com uma superfície cilíndrica.

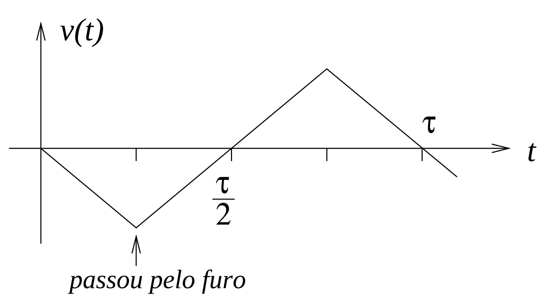


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2E\Delta A = \frac{\sigma\Delta A}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(b) A diferença de energia potencial é dada por

$$\Delta U = qEh = \frac{q\sigma h}{2\epsilon_0}$$

(c) A partícula vai oscilar entre $z = h$ e $z = -h$ com aceleração constante nos trechos $-h < z < 0$ e $0 < z < h$.



Formulário

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}};\ \int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{(a^2+x^2)^{1/2}};\ \int \frac{x dx}{(a^2+x^2)^{1/2}} = \sqrt{a^2+x^2}$$