P2

Física III

Escola Politécnica - 2004

FGE 2203 - Gabarito da P2

20 de maio de 2004

♢ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

♢ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

♢ Escreva de forma legível.

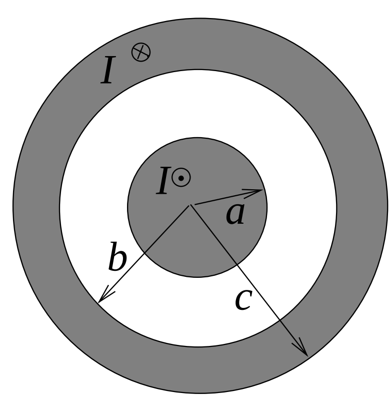
♢ É proibido o uso de calculadoras.

♢ Resolva cada questão na folha apropriada.

♢ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

A figura ao lado mostra o corte de um cabo co-axial de comprimento infinito formado por um cilindro interno de raio a e uma casca cilíndrica de raios b e c. Uma corrente I sai pelo cilindro interno e entra pela casca externa, *uniformemente distribuida*.



(1,0 ponto) (a) Calcule o campo magnético em todos os pontos do espaço externos aos condutores.

(1,5 ponto) (b) Calcule o campo magnético no interior dos condutores.

Solução da Questão 1

(a) Para $r > c$ as contribuições do cilindro interno e da casca se cancelam. Para $a < r < b$ somente o cilindro interno contribui produzindo um campo (sentido anti-horário)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

(b) No interior do cilindro o vetor densidade de corrente tem componente saindo da página

$$J = \frac{I}{\pi\, a^2}.$$

Portanto,

$$B\,(2\pi\, r) = \mu_0\, \frac{I}{\pi\, a^2}\, \pi\, r^2.$$

Logo

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, a^2}\, r.$$

No interior da casca o vetor densidade de corrente tem componente

$$J = -\frac{I}{\pi\,(c^2 - b^2)}.$$

Portanto,

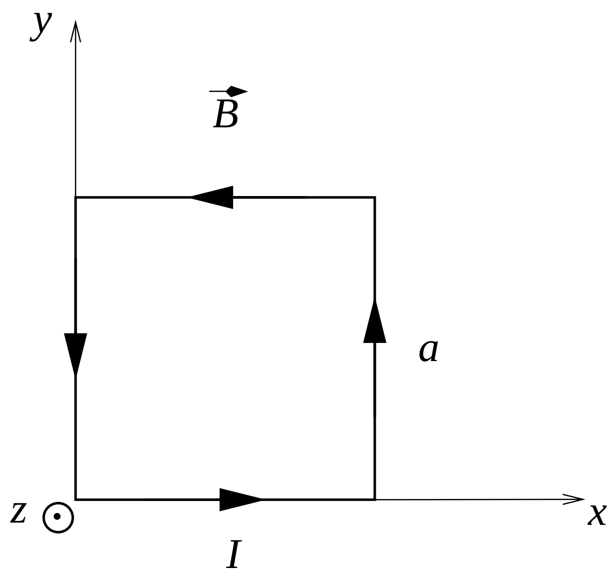
$$B\,(2\pi\, r) = \mu_0\, I \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$$

Logo

$$B = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right) = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, r} \left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right).$$

Questão 2

Uma espira condutora quadrada de lado a está no plano $z = 0$ conforme mostra a figura ao lado. A corrente I circula no sentido indicado na figura.



(1,0 ponto) (a) Calcule o momento magnético $\vec{\mu}$ da espira.

(1,0 ponto) (b) Determine o torque $\vec{\tau}$ exercido por um campo magnético *uniforme* $\vec{B} = B_0\,\vec{\jmath}$. sobre a espira.

(0.5 ponto) (c) Suponha agora que $\vec{B}$ seja um campo *não uniforme* cuja dependência espacial é dada pela equação

$$\vec{B}(y,z) = B_0\left(1 - \frac{2y}{a}\right)\vec{\jmath} + B_0\,\frac{z}{a}\,\vec{k}.$$

Calcule a força magnética sobre cada um dos lados e determine a *força resultante* sobre a espira.

(0.5 ponto) (d) Mostre que o torque das forças em relação ao centro da espira (centro de massa) é nulo.

Solução da Questão 2

(a)

$$\vec{\mu} = I\,\vec{A} = I\,a^2\,\vec{k}.$$

(b)

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (I\,a^2\,\vec{k}) \times (B_0\,\vec{\jmath}) = I\,a^2\,B_0\,\vec{k} \times \vec{\jmath} = -I\,a^2\,B_0\,\vec{\imath}.$$

(c) A força é nula nos dois lados verticais ($\vec{B} \,||\, d\vec{L}$). No lado inferior,

$$\vec{B}(0,0) = B_0\,\vec{\jmath}.$$

Logo,

$$\vec{F}_1 = I\,a\,\vec{\imath} \times (B_0\,\vec{\jmath}) = I\,a\,B_0\vec{k}.$$

No lado superior

$$\vec{B}(a,0) = -B_0\,\vec{\jmath}.$$

Logo,

$$\vec{F}_2 = -I\,a\,\vec{\imath} \times (-B_0\,\vec{\jmath}) = I\,a\,B_0\vec{k}.$$

Assim, a resultante é

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2I\,a\,B_0\vec{k}.$$

(d) Como $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são paralelas (mesmo sentido), o torque em relação ao centro da espira será nulo.

Questão 3

A figura (3a) mostra um segmento reto de fio condutor, de comprimento a, por onde flui uma corrente I.

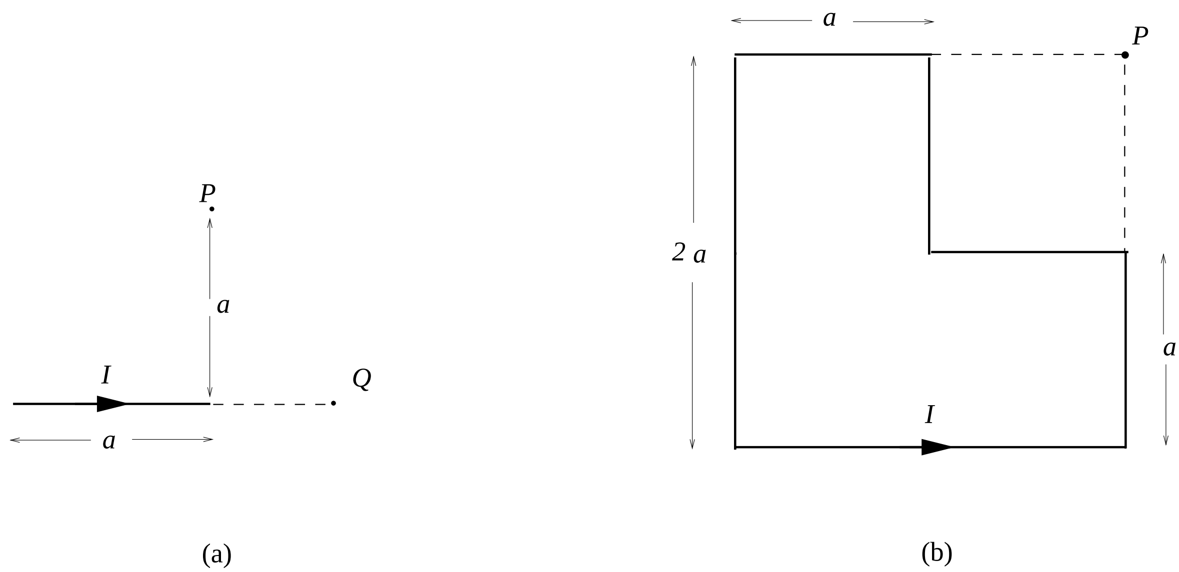


Figura 3:

(1,0 ponto) (a) Calcule o campo magnético produzido por este segmento nos pontos P e Q, como indicado na figura (3a).

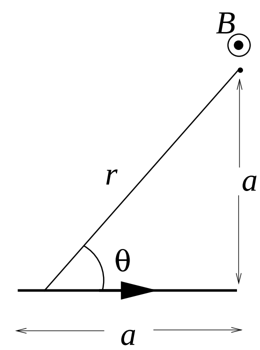
(1,0 ponto) (b) Calcule o valor do campo magnético no ponto P da figura (3b).

Dado: $d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$

Solução da Questão 3

(a) Em Q o campo é nulo, pois $d\vec{L} \;||\; \hat{r}$. Em P,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{L} \times \hat{r}}{r^2}$$

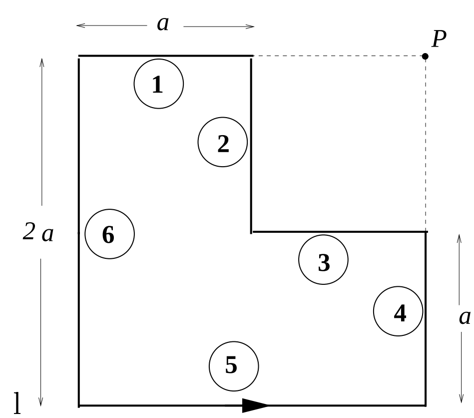


cuja componente saindo da página é

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^a dx\, \frac{\mathrm{sen}\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I\, a}{4\pi} \int_0^a \frac{dx}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{\mu_0 I}{4\pi\, a},$$

onde usamos $x = -a\, cotg\, \theta$, $dx = a\, cossec^2\, \theta\, d\theta$ e $r = a/sen\, \theta$.

(b) Rotulando os lados como na figura abaixo



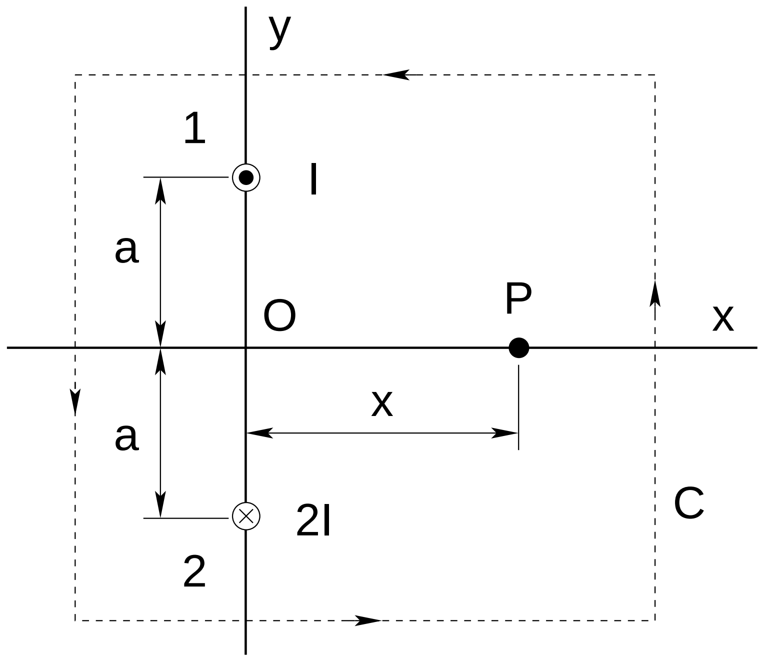
e denotando por $\vec{B}_i$ o campo produzido pelo lado i, teremos $\vec{B}_1 = \vec{B}_4 = 0$. $\vec{B}_2$ e $\vec{B}_3$ produzem cada um o campo do ítem (a) com o sinal trocado. $\vec{B}_5$ e $\vec{B}_6$ produzem cada um o campo do ítem (a) com $a \to 2a$. Usando o princípio de superposição,

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{\mu_0 I}{4\pi\, a} \left(-1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, \frac{\mu_0 I}{4\pi\, a}$$

Portanto $\vec{B}$ é igual ao campo do ítem (a) com o sinal trocado.

Questão 4

A figura mostra dois fios infinitos, paralelos e perpendiculares ao plano xy, percorridos por correntes I e $2I$ em sentidos opostos.



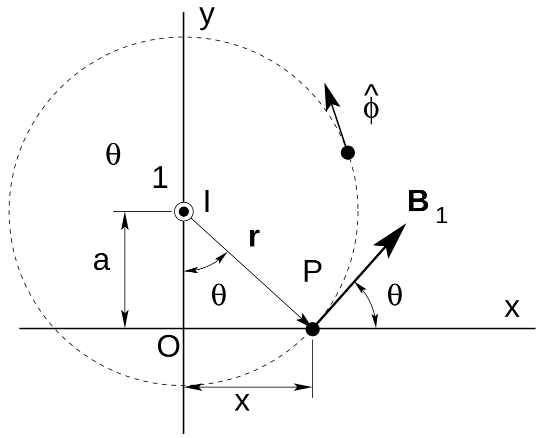
(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère, determine o vetor campo magnético $\mathbf{B}_1$ produzido pelo fio 1 no ponto P de coordenada x. Expresse o vetor $\mathbf{B}_1$ em coordenadas cartesianas.

(b) (1,0 ponto) Determine o campo magnético resultante $\mathbf{B}$ produzido pelos dois fios paralelos no ponto P. Expresse o vetor $\mathbf{B}$ em coordenadas cartesianas.

(c) (0,5 pontos) Determine a integral de linha do campo magnético $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ ao longo do caminho tracejado C da figura percorrido no sentido indicado.

Solução da Questão 4

(a) Devido à simetria cilíndria, o campo magnético tem a forma $\mathbf{B}_1 = B_1(r)\widehat{\boldsymbol{\phi}}$. Aplicando a lei de Ampère ao circuito pontilhado da figura obtemos



$$\oint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s} = \mu_o I \quad \Longrightarrow \quad 2\pi r B_1(r) = \mu_0 I \quad \Longrightarrow \quad B_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\widehat{\boldsymbol{\phi}}.$$

No ponto P temos

$$\widehat{\boldsymbol{\phi}} = \cos\theta\widehat{\mathbf{x}} + \operatorname{sen}\theta\widehat{\mathbf{y}} = (a\widehat{\mathbf{x}} + x\widehat{\mathbf{y}})/r, \qquad r = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Portanto,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(a\widehat{\mathbf{x}} + x\widehat{\mathbf{y}}) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{a\widehat{\mathbf{x}} + x\widehat{\mathbf{y}}}{a^2 + x^2}}$$

(b) Por simetria o campo magnético produzido pelo fio 2 em P é

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{a\widehat{\mathbf{x}} - x\widehat{\mathbf{y}}}{a^2 + x^2}$$

O campo magnético resultante é

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{3a\widehat{\mathbf{x}} - x\widehat{\mathbf{y}}}{a^2 + x^2}\right)}$$

(c) Pela lei de Ampère,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(+I - 2I) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -\mu_0 I}$$