P3

Física III

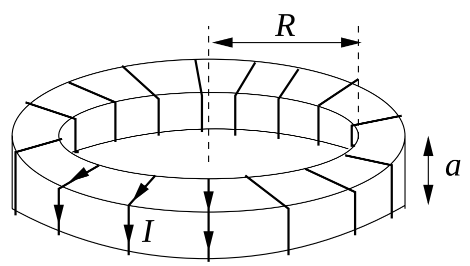
Escola Politécnica - 2004

FGE 2203 - GABARITO DA P3

1 de julho de 2004

Questão 1

Considere um toróide de seção quadrada de lado a e raio interno R, conforme a figura,



que possui N espiras enroladas, e por onde passa uma corrente I. Ele se encontra no vácuo.

(1,0 ponto) (a) Calcule o vetor campo magnético no interior do toróide ($\vec{B}_0$) e o coeficiente de auto-indutância L.

Agora, o toróide é preenchido com um material de suscetibilidade magnética χ_m.

(0,5 ponto) (b) Determine o vetor intensidade magnética $\vec{H}$ no interior do toróide.

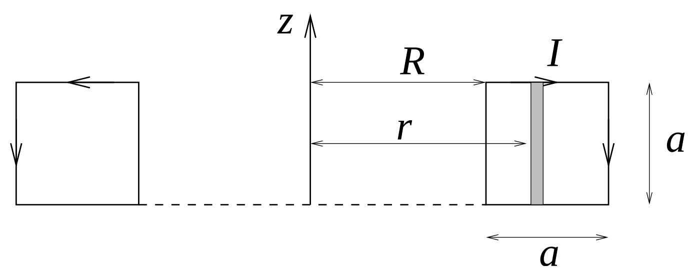
(0,5 ponto) (c) Determine o campo magnético ($\vec{B}$) no interior do toróide na presença do material.

(0,5 ponto) (d) Determine o vetor magnetização $\vec{M}$ no material.

Solução

(a) O campo $\vec{B}_0$ em um ponto dentro do solenóide depende, aproximadamente, apenas da distância r entre este ponto e o centro do solenóide. Fora do solenóide o campo é aproximadamente nulo. Usando a lei de Ampère e escolhendo para o caminho C um círculo de raio r, concêntrico com o toróide, obtemos:

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_0 = \mu_0 N I \Longrightarrow \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\hat{\theta}$$



O fluxo através de uma espira é

$$\Phi^{(1)} = \int \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{1}{r} a dr = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ell n \left(\frac{R+a}{R} \right)$$

A auto-indutância é dada por

$$L = \frac{N\Phi^{(1)}}{I} = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ell n \left(\frac{R+a}{R} \right)$$

(b) O vetor intensidade magnética é dado por

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{NI}{2\pi r}\hat{\theta}$$

(c) O campo $\vec{B}$ dentro do material é

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = (1 + \chi_m) \vec{B}_0$$

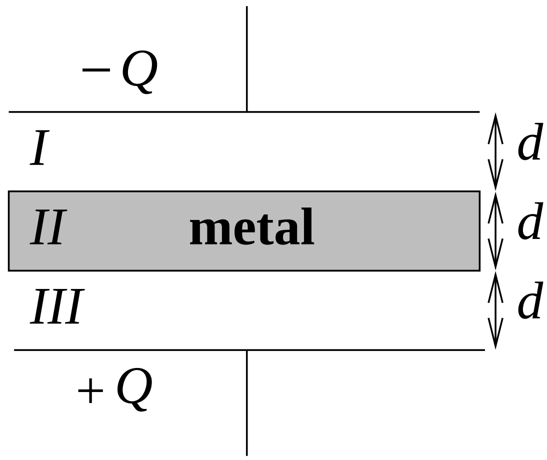
$$\Leftrightarrow \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \frac{NI}{2\pi r} \hat{\theta}$$

(d) A magnetização dentro do material é

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\chi_m N I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Questão 2

Considere um capacitor de placas paralelas de área A separadas por uma distância $3d$. Uma chapa metálica de espessura d, área A e carga nula é inserida entre as placas, conforme a figura.



As placas do capacitor possuem cargas $+Q$ e $-Q$ distribuidas uniformemente.

(0.5 ponto) (a) Determine a distribuição de carga na chapa metálica. Justifique sua resposta.

(0.5 ponto) (b) Determine o vetor campo elétrico nas regiões I, II e III, conforme a figura.

(0.5 ponto) (c) Determine a diferença de potencial elétrico entre as placas do capacitor.

(0.5 ponto) (d) Determine a capacitância do sistema.

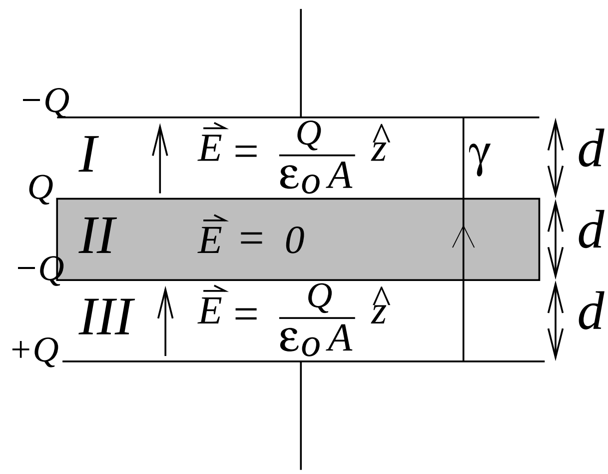
Solução

(a) Para que o campo elétrico no interior do condutor seja nulo, a carga induzida na superfície superior da chapa deve ser igual a $+Q$ e a carga induzida na superfície inferior deve ser igual a $-Q$, ambas uniformemente distribuidas.

(b) O campo elétrico no capacitor plano pode ser calculado com a Lei de Gauss e vale

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A},$$

dentro do capacitor, e $E = 0$, fora dele. As distribuições de carga nas superfícies da placa metálica criam um campo igual e oposto ao do capacitor de modo que o campo dentro da placa é zero.



(c) A diferença de potencial é (veja a figura)

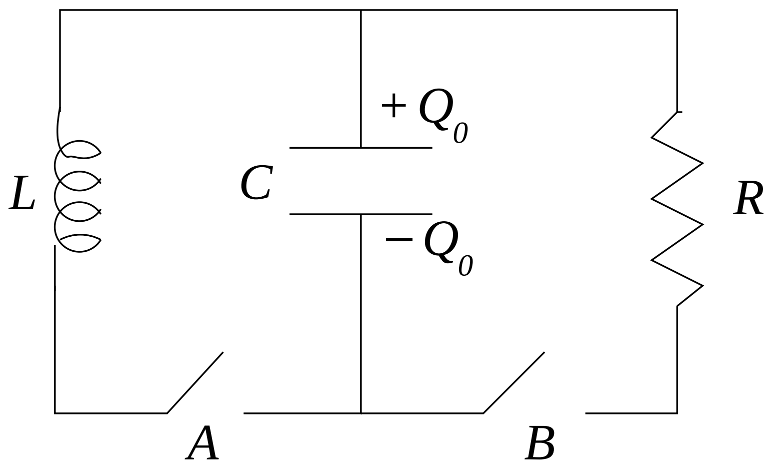
$$\Delta V = \int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d + 0 + \frac{Q}{\epsilon_0 A} d = \frac{2Q}{\epsilon_0 A} d$$

(d) A capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q\epsilon_0 A}{2Qd} = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

Questão 3

Considere o circuito representado na figura abaixo, onde L, C e R são a indutância, a capacitância e a resistência dos diferentes componentes. $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são duas chaves que servem para abrir ou fechar o circuito.



No instante $t = 0$ o capacitor está carregado com carga Q_0. A chave B está aberta e a chave A é então fechada.

(0.5 ponto) (a) Escreva a equação diferencial que representa o circuito fechado, em termos da carga na placa superior do capacitor ($Q(t)$).

(1.0 ponto) (b) Qual é a expressão da carga em função do tempo e em termos de Q_0, L e C ?

Agora, no instante $t = 2\pi\sqrt{LC}$ a chave A é aberta e a B é fechada.

(0.5 ponto) (c) Escreva a equação diferencial que representa o circuito fechado.

(0.5 ponto) (d) Determine a carga na placa superior do capacitor ($Q(t)$) em função do tempo.

Solução

(a) A equação do circuito é

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}$$

Para o capacitor descarregando $I = -dQ/dt$. Assim,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2\, Q = 0\ ; \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$$

(b) A solução geral da equação acima é

$$Q = Acos(\omega_0 t + \phi) \Longrightarrow I = -dQ/dt = A\omega_0 sen(\omega_0 t + \phi)$$

No instante $t = 0$,

$$Q(0) = Acos(\phi) = Q_0 \quad \text{e} \quad I(0) = A\omega_0 sen(\phi) = 0$$

Portanto, $\phi = 0$, $A = Q_0$ e

$$Q = Q_0 cos(\omega_0 t)$$

(c) Para o circuito RC temos

$$RI = \frac{Q}{C}$$

No instante $t = 2\pi\sqrt{LC} = T$ (um período) o capacitor está novamente com a carga máxima Q_0. Com o capacitor descarregando $I = -dQ/dt$ e

$$-R\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} \Longrightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q$$

(d) A equação acima pode ser integrada

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}dt \Longrightarrow \int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q} = -\int_{T}^{t}\frac{1}{RC}dt \Longrightarrow \ell n\frac{Q}{Q_0} = -\frac{1}{RC}(t-T)$$

$$\Longrightarrow Q(t) = Q_0 e^{-(t-2\pi\sqrt{LC})/RC}$$

Questão 4

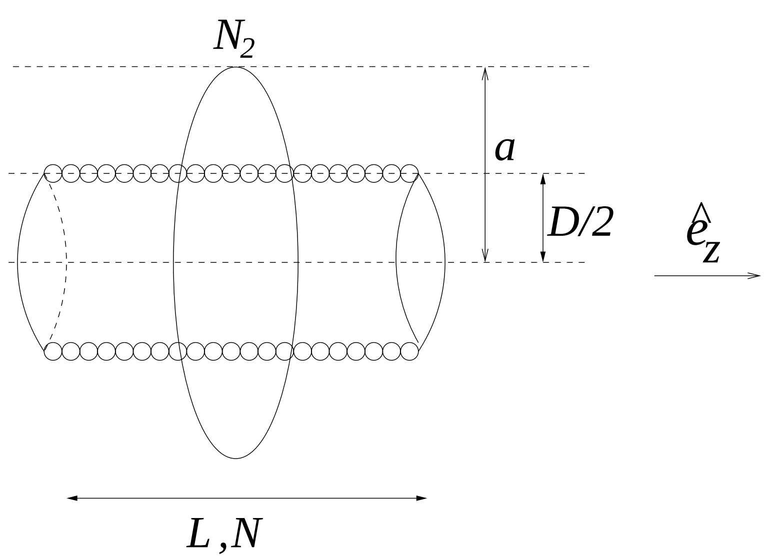
Um solenóide ideal com diâmetro D e comprimento L possui N_1 espiras. Um anel de raio a, formado por N_2 espiras é posicionado de modo que seu eixo seja coincidente com o do solenóide. A resistência deste anel é de R_2 ohms.

(1,0 ponto) (a) Determine a mútua indutância M_{12} do sistema quando $a > D/2$ e quando $a < D/2$.

(1,0 ponto) (b) Uma corrente $I_1(t) = I_0 \cos(\omega t)$ é passada pelo solenóide. Determine a corrente induzida na espira quando $a > D/2$.

(1.0 ponto) (c) No caso do item b, se o eixo do anel for deslocado de uma distância $d < (a - D/2)$ paralelamente ao eixo do solenóide, haverá mudança na corrente induzida no anel? Justifique sua resposta em termos da lei de Faraday.

Solução



(a) Campo do solenóide:

$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N_1}{L} I \hat{e}_z$$

Fluxo através das N_2 espiras

$$\Phi = B \times (\text{área de uma espira}) \times N_2$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{a<D/2} &= \mu_0 \frac{N_1}{L} I \times N_2 \, \pi a^2 \\
\Phi_{a>D/2} &= \mu_0 \frac{N_1}{L} I \times N_2 \, \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Logo

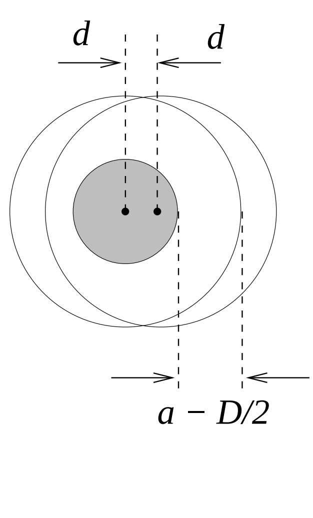
$$\begin{aligned}
M_{12}(a < D/2) &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{L} \pi a^2 \\
M_{12}(a > D/2) &= \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{L} \pi \left(\frac{D^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

(b) Usando a lei de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -M_{12}\frac{dI}{dt} \quad \text{e} \quad I_{anel} = \frac{\varepsilon}{R_2}$$

Como $\frac{dI}{dt} = -\omega I_0 sen(\omega t)$ teremos

$$I_{anel}(t) = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{L R_2} \, \omega I_0 \frac{D^2}{4} sen(\omega t)$$



(c) Como $d < [a - D/2]$ o fluxo gerado pelo solenóide no anel não sofrerá alteração com respeito ao caso do item b, logo $I(t)$ não se alterará.