PS

Física III

Escola Politécnica - 2004

FGE 2203 - GABARITO DA PS

8 de julho de 2004

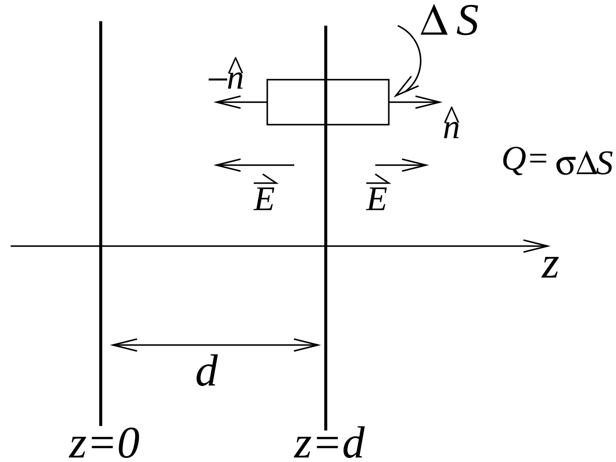
Questão 1

Duas placas planas isolantes e infinitas situadas nos planos $z = 0$ e $z = d$ estão carregadas com densidades superficiais de carga σ_0 e $-2\sigma_0$, respectivamente.

(1,0 ponto) (a) Usando a lei de Gauss determine o vetor campo elétrico nas regiões com $z < 0$, $0 < z < d$ e $z > d$. Use o princípio de superposição.

(1,5 ponto) (b) Calcule a diferença de potencial entre os pontos $z = 2d$ e $z = d/2$.

Solução



(a) Por simetria o campo é perpendicular às placas e portanto ao longo do eixo z. Usando a lei de Gauss o campo de cada placa é dado por

$$\int_{S_f} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow 2E\Delta S = \frac{\sigma\ \Delta S}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Logo, usando a superposição, teremos na região $\underline{z < 0}$

$$\vec{E} = \left[-\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma_0}{2\epsilon_0}\right] \hat{e}_z = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$$

para $\underline{0 < z < d}$

$$\vec{E} = \left[\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma_0}{2\epsilon_0}\right] \hat{e}_z = \frac{3\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$$

para $\underline{z > d}$

$$\vec{E} = \left[\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma_0}{2\epsilon_0}\right] \hat{e}_z = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{e}_z$$

(b) A diferença de potencial é dada por:

$$V = -\int_{2d}^{d/2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{com} \quad d\vec{\ell} = \hat{e}_z dz$$

$$V = -\int_{2d}^{d} \left(-\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{e}_z\right) \cdot \hat{e}_z dz - \int_{d}^{d/2} \left(\frac{3\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{e}_z\right) \cdot \hat{e}_z dz$$

$$= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}(d - 2d) - \frac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}(d/2 - d) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} d + \frac{3\sigma_0}{2\epsilon_0} d/2$$

$$\boxed{V = \frac{\sigma_0 d}{4\epsilon_0}}$$

Questão 2

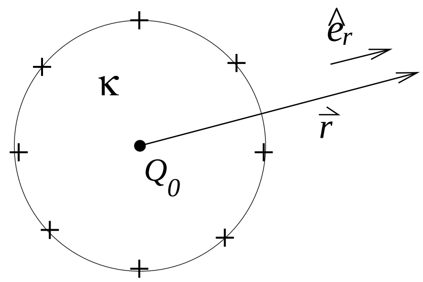
Uma carga pontual $+Q_0$ está situada no centro de uma esfera dielétrica maciça de raio R e de constante dielétrica κ. Determine:

(1,0 ponto) (a) O campo elétrico dentro e fora da esfera de raio R (i.e. para $r < R$ e $r > R$).

(1,0 ponto) (b) O potencial em função da distância r, para todo valor de $r > 0$.

(0,5 ponto) (c) A densidade superficial de cargas induzidas na superfície do dielétrico. Sugestão para o item c: use a lei de Gauss aplicada a um pequeno volume na superfície do dielétrico.

Solução



(a) Na região com $r > R$, o campo elétrico será o de uma carga puntual, ou seja

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\ \hat{e}_r\ ,$$

onde $\hat{e}_r \equiv \vec{r}/r$.

Quando $r < R$, o campo no interior do dielétrico é reduzido por um fator κ, logo

$$\vec{E}_{r<R}(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 \kappa r^2}\ \hat{e}_r\ .$$

(b) O potencial é dado por

$$V(r) = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

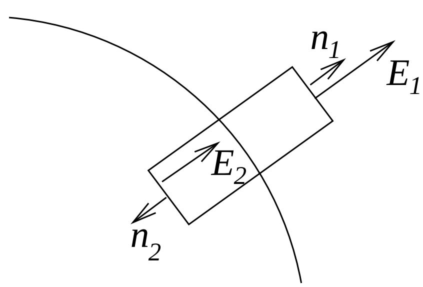
<u>Para $r > R$</u>

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

<u>Para $r < R$</u>

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} - \int_{R}^{r} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\kappa r^2}\ \hat{e}_r\cdot dr\hat{e}_r = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\kappa r} - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\kappa R}$$

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\kappa}\left(\frac{\kappa r + R - r}{Rr}\right)$$



(c) Lei de Gauss

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0} dS$$

$$\Longrightarrow E_1\cdot\Delta S - E_2\cdot\ \Delta S = \frac{\sigma_{sup}}{\epsilon_0}\Delta S$$

Usando os campos E_1 e E_2 calculados em (a)

$$\sigma_{sup} = \epsilon_0(E_1 - E_2) = \frac{Q_0}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

Questão 3

Um fio com resistência K ohms por metro é recoberto de um verniz isolante e enrolado sobre um cilindro muito longo de ferro com comprimento ℓ. O cilindro tem raio b e um total de $N = 10000$ espiras do fio são enroladas ao longo do cilindro.

(0,5 ponto) (a) Qual é a resistência desse enrolamento?

(1,0 ponto) (b) Se o núcleo de ferro possui uma permeabilidade de $5000\mu_0$ qual será a auto-indutância do enrolamento?

(1,0 ponto) (c) Se a bobina for ligada a uma bateria de V_0 volts qual será a energia armazenada no indutor quando a corrente no circuito se estabilizar?

Solução

(a) A resistência é

$$R = K \cdot N \cdot 2\pi b = 2\pi b K 10^4$$

(b) A auto-indutância é dada por

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

No vácuo

$$\Phi_{vácuo} = B_0 \times \pi b^2 \times N = \mu_0 \frac{10^4}{\ell} I \times \pi b^2 \times 10^4 \ .$$

Com o núcleo de ferro o campo passa a ser

$$B = \kappa_m H \quad \text{onde} \quad H = nI = \frac{10^4}{\ell} I$$

Logo

$$\Phi_{mag} = B \times \pi b^2 \times N = 5000 \mu_0 \ \frac{10^4}{\ell} I \times \pi b^2 \times 10^4 \ ,$$

ou seja

$$\boxed{L_{mag} = \mu_0 \ \frac{5000 \times 10^8}{\ell} \ \pi b^2}$$

(c) A energia magnética é dada por

$$U = \frac{1}{2} L I^2 \ ,$$

onde

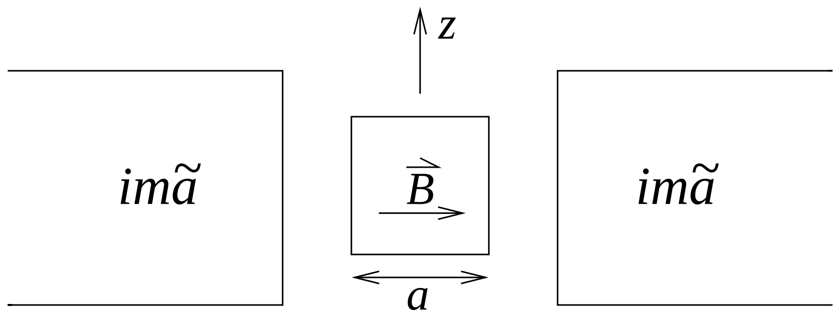
$$I = \frac{V_0}{R} = \frac{V_0}{2\pi b K 10^4}$$

$$\Longrightarrow U = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{5000 \times 10^8}{\ell} \ \pi b^2 \cdot \frac{V_0^2}{4\pi^2 b^2 K^2 10^8}$$

$$\boxed{U = \frac{\mu_0 \times 5 \times 10^3}{8 \ell \pi K^2} V_0^2}$$

Questão 4

Um imã permanente produz um campo magnético uniforme $\vec{B}$ na região em que se encontra uma espira quadrada de lado a e resistência R. A espira gira em torno do eixo z, impulsionada por um agente externo, com velocidade angular constante ω. Calcule:



(1,0 ponto) (a) a corrente induzida na espira como função do tempo;

(0,5 ponto) (b) o torque exercido pelo agente externo sobre a espira como função do tempo;

(1,0 ponto) (c) a potência em função do tempo fornecida pelo agente externo.

Solução

(a) A corrente é dada por $I = \varepsilon/R$, onde a força eletromotriz ε é calculada com a lei de Faraday.

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = Ba^2 cos(\theta_0 + \omega t) \Longrightarrow \varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \omega B a^2 sen(\theta_0 + \omega t)$$

$$\Longrightarrow I = \frac{\omega B a^2}{R} sen(\theta_0 + \omega t)$$

(b) O torque é igual a

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = I a^2 B sen(\theta_0 + \omega t) \hat{e}_z$$

(c) A potência instantânea é dada por

$$P = RI^2 = R \left[\frac{\omega B a^2}{R} sen(\theta_0 + \omega t) \right]^2 \Longrightarrow P = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{R} sen^2(\theta_0 + \omega t)$$