P1

Física III

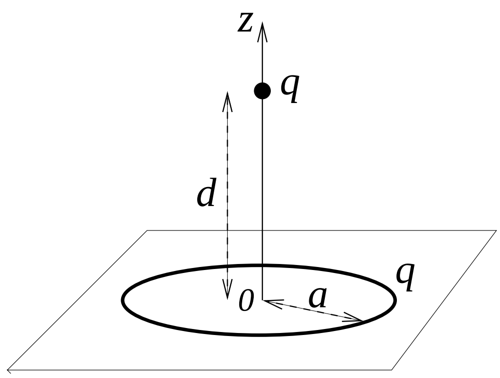
Escola Politécnica - 2005

FGE 2203 - GABARITO DA P1

14 de abril de 2005

Questão 1

Um anel carregado uniformemente de raio a e com carga total $q > 0$ está situado no plano $z = 0$. O centro do anel está na origem. Uma carga pontual $q > 0$ está posicionada a uma distância d da origem sobre o eixo z, conforme mostra a figura ao lado.



(1,0 ponto) (a) Determine o campo do anel sobre o eixo para $z > 0$.

(0,5 ponto) (b) Calcule a força exercida pela carga q sobre o anel.

(1,0 ponto) (c) Uma carga adicional de valor $Q > 0$ é colocada sobre o eixo z de modo que ela tem seu movimento restrito a esse eixo. Em que posição (valor de z) a força sobre esta carga será nula? (Não é necessário resolver a equação, apenas indica-la.)

Solução

(a) Campo do anel (ver livro texto)

$$\vec{E}_{anel}(z) = \frac{q\,z}{4\pi\epsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{e}_z$$

(b) Força da carga sobre o anel

$$\vec{F} = -q\vec{E}_{anel}(d) = -\frac{q^2\,d}{4\pi\epsilon_0(d^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{e}_z$$

(c) Campo sobre o eixo z: $\vec{E}(z) = \vec{E}_{anel}(z) + \vec{E}_q(z)$

$$\vec{E}_q(z) = \hat{e}_z \cdot \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0(z-d)^2}\,, & z > d \\ -\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0(d-z)^2}\,, & z < d \end{cases}$$

Para que a força seja nula sobre a carga Q, ela deve se situar entre a carga pontual e o anel, logo entre $0 < z < d$. O campo na carga Q será nulo (e a força também) para

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0(d-z)^2} = \frac{q\,z}{4\pi\epsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}} \Longrightarrow \boxed{z(d-z)^2 = (z^2+a^2)^{3/2}}$$

O z deve satisfazer esta equação e estar entre zero e d.

Questão 2

Duas esferas condutoras, cada uma carregada com uma carga Q, estão situadas a uma distância d muito grande uma da outra, de tal maneira que a carga nos condutores possa ser considerada uniformemente distribuida. Uma esfera possui raio R_1 e a outra raio $R_2 > R_1$.

(0,5 ponto) (a) Qual é o campo elétrico no interior de cada esfera? Justifique.

(0,5 ponto) (b) Qual é o campo a uma distância $r << d$ no exterior de cada esfera? (Use a lei de Gauss.)

(1,0 ponto) (c) Qual é o potencial de cada esfera em função dos seus raios e da carga Q, admitindo potencial nulo no infinito?

(1,0 ponto) (d) As esferas são colocadas em contato por um longo fio condutor. Determine a carga final de cada esfera após estas terem sido colocadas em contato pelo fio condutor.

Solução

(a) O campo é nulo no interior de um condutor.

(b) Usando a lei de Gauss com $\vec{E} = E(r)\hat{e}_r$ e $d\vec{S} = dS\hat{e}_r$ obtemos

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(c) Potencial na superfície das esferas:

$$V(r = R_1) = -\int_{\infty}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

$$V(r = R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

(d) Neste caso o potencial das esferas é o mesmo, logo

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \Longrightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

A carga total se conserva, portanto

$$Q_1 + Q_2 = 2Q$$

Usando estas duas equações obtemos

$$\boxed{Q_1 = \frac{2Q\dfrac{R_1}{R_2}}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}}, \qquad \boxed{Q_2 = \frac{2Q}{1 + \dfrac{R_1}{R_2}}}$$

Questão 3

Um cilindro isolante muito longo, uniformemente carregado com uma densidade volumétrica de carga ρ, tem raio a e seu eixo coincidindo com o eixo z.

(1,0 ponto) (a) Usando a lei de Gauss, determine o campo elétrico em um ponto qualquer do plano $z = 0$. Calcule o campo no interior do cilindro ($\vec{E}_1$) e no exterior do cilindro ($\vec{E}_2$).

(1.0 ponto) (b) Determine o trabalho que deve ser realizado para deslocar uma carga Q no plano $z = 0$ de uma distância $4a$ do eixo do cilindro até a sua superfície.

Solução

(a) Usando Gauss

$$E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\rho \pi r^2 \ell}{\epsilon_0} \quad \text{p/ } \ r < a$$

$$E(r) \cdot 2\pi r \ell = \frac{\rho \pi a^2 \ell}{\epsilon_0} \quad \text{p/ } \ r \geq a$$

Logo

$$\vec{E}(r) = \hat{e}_r \cdot \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0} \,, & r < a \\ \\ \dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \,, & r \geq a \end{cases}$$

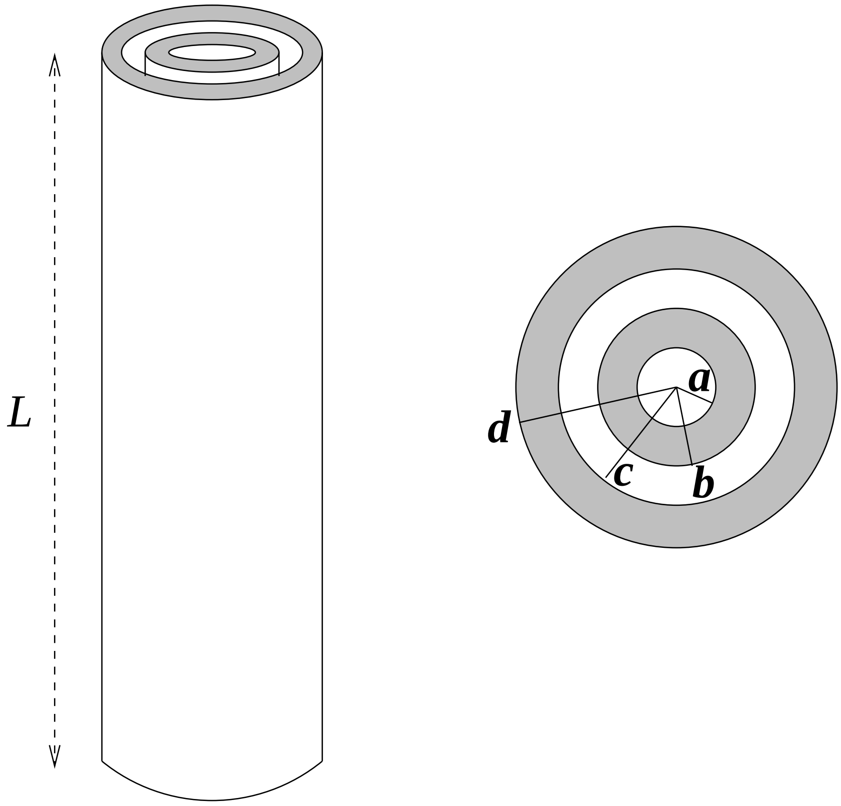
(b) O trabalho é dado por $\tau = Q\Delta V$, onde

$$\Delta V = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{4a}^{a} \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} dr = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \log r \Big|_{4a}^{a} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \log 4$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{Q\rho a^2}{2\epsilon_0} \log 4}$$

Questão 4

Dois cilindros <u>metálicos</u>, <u>condutores</u>, muito longos, com comprimento L, foram montados como mostra a figura. O cilindro central foi conectado a uma fonte elétrica e carregado com carga Q.



(1,0 ponto) (a) Calcule a densidade superficial de carga nas quatros superfícies de raios a, $b = 2a$, $c = 3a$, e $d = 4a$.

(0,5 ponto) (b) Qual é o campo elétrico $E(r > d)$ na região central, externa aos dois cilindros, e longe das pontas?

(1.0 ponto) (c) Qual é a diferença de potencial $\Delta V = V_b - V_c$ entre os dois cilindros?

Solução

(a) Nos condutores (regiões sombreadas) o potencial é constante e o campo é nulo. Usando estas propriedades, a simetria do sistema, e a lei de Gauss podemos escrever:

$$V(a \leq r \leq b) = cte \;, \quad E(a < r < b) = 0 \qquad \Rightarrow \boxed{q_a = 0} \Rightarrow \boxed{\sigma_a = 0}$$

Como $q_a + q_b = Q$, então $\boxed{q_b = Q}$.

$$V(c \leq r \leq d) = cte \;, \quad E(c < r < d) = 0 \qquad \Rightarrow q_a + q_b + q_c = 0$$

Portanto, $\boxed{q_c = -Q}$. Finalmente, $q_a + q_b + q_c + q_d = Q \Rightarrow \boxed{q_d = Q}$ e

$$\boxed{\sigma_b = \frac{Q}{4\pi a L}} \qquad \boxed{\sigma_c = \frac{-Q}{6\pi a L}} \qquad \boxed{\sigma_d = \frac{Q}{8\pi a L}}$$

(b) Usando a lei de Gauss com uma superfície cilíndrica de altura ℓ, raio r, e coaxial aos dois cilindros obtemos

$$E(r) 2\pi r \ell = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{8\pi a L} 2\pi d \ell \Longrightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L r}}$$

(c) Diferença de potencial

$$\Delta V = V_b - V_c = -\int_c^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r} dr \Longrightarrow \boxed{\Delta V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 L} \log\left(\frac{c}{b}\right)}$$