P2

Física III

Escola Politécnica - 2005

FGE 2203 - GABARITO DA P2

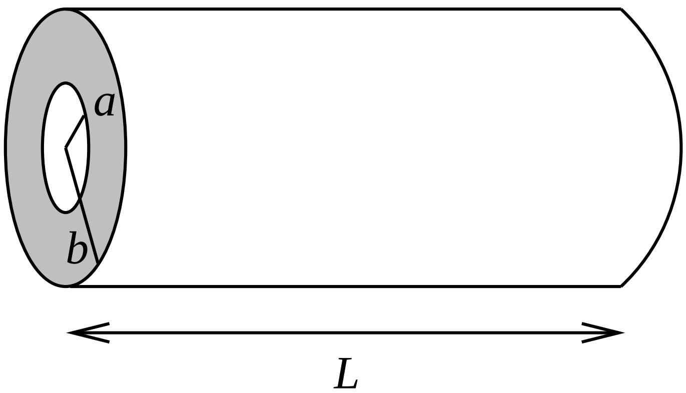
19 de maio de 2005

Questão 1

Um resistor, com resistividade ρ, tem a forma de um cilindro oco de comprimento L e raios a e b. Calcule a resistência R, como função de ρ, L, a e b, nos casos em que uma diferença de potencial V é aplicada:

(1,0 ponto) (a) entre as bases do cilindro;

(1.5 ponto) (b) entre as superfícies interna (de raio a) e externa (de raio b).



Solução

(a) Usamos $dR = \rho\, dl\, /A$ e como $A = \pi b^2 - \pi a^2$ é constante obtemos

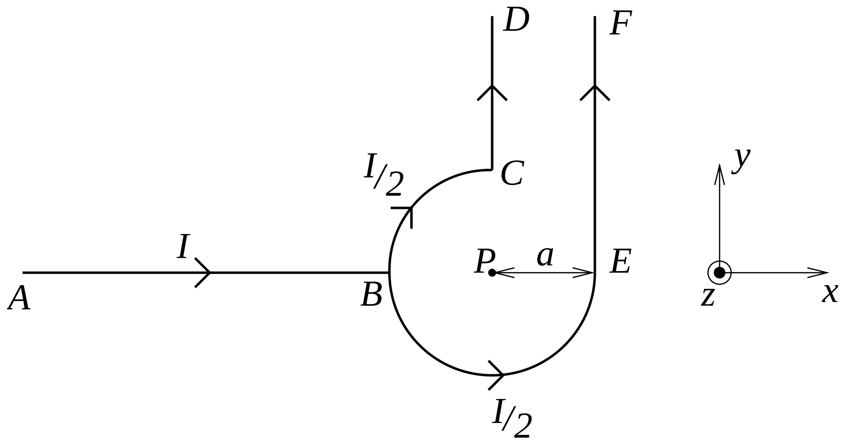
$$R = \int \frac{\rho}{A} d\ell = \int_0^L \frac{\rho}{\pi b^2 - \pi a^2} d\ell = \frac{\rho L}{\pi(b^2 - a^2)}$$

(b) Utilizamos as áreas laterais de cilindros concêntricos de espessura dr

$$R = \int \frac{\rho}{A} d\ell = R = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi r L} dr = \frac{\rho}{2\pi L} \log\left(\frac{b}{a}\right)$$

Questão 2

Um fio condutor semi-infinito AB, percorrido por uma corente I, bifurca-se em dois fios semi-infinitos BCD e BEF, com correntes $I/2$, como mostrado na figura.



(2,0 ponto) (a) Calcule o campo magnético no ponto P (centro da circunferência de raio a).

(0,5 ponto) (b) Obtenha a força que agiria sobre uma carga pontual Q passando pelo ponto P com velocidade $\vec{v} = v_0\vec{\imath} + v_0\vec{\jmath}$.

Solução

(a) Os trechos AB e CD não contribuem porque neles $d\vec{\ell} \times \hat{r} = 0$.

O trecho EF produz metade do campo magnético gerado por um fio infinito percorrido por uma corrente $I/2$.

$$\vec{B}_{EF} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I/2}{2\pi a}\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{8\pi a}\vec{k}$$

Trecho BC (Biot-Savart) $\Longrightarrow \vec{B}_{BC} = -\dfrac{\mu_0 I}{16a}\vec{k}$

Trecho BE (Biot-Savart) $\Longrightarrow \vec{B}_{BE} = \dfrac{\mu_0 I}{8a}\vec{k}$

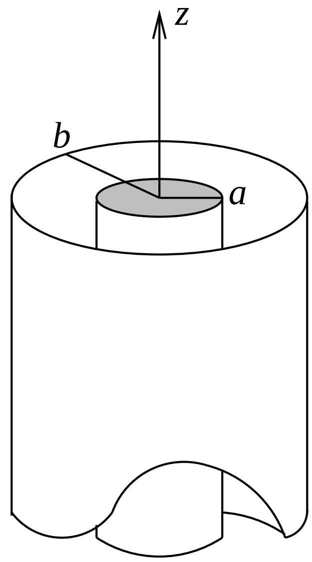
$$\vec{B}_P = \left(\frac{\mu_0 I}{8\pi a} - \frac{\mu_0 I}{16a} + \frac{\mu_0 I}{8a}\right)\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{8a}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\vec{k}$$

(b) A força é dada por $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{F} = Q(v_0\vec{\imath} + v_0\vec{\jmath}) \times B\vec{k} = Qv_0 B(-\vec{\jmath} + \vec{\imath})$$

Questão 3

Um fio de raio a, ao longo do eixo z está envolto em uma casca cilíndrica de raio b formando um cabo coaxial. No fio há uma densidade de corrente uniforme $\vec{J} = J\vec{k}$ e na casca uma densidade superficial de corrente $\vec{K} = K\vec{k}$, sendo J, K constantes positivas.



(1,0 ponto) (a) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ em todos os pontos do volume delimitado pela casca cilíndrica (isto é, nos pontos com $0 \leq \rho < b$, onde ρ é a distância do ponto até o eixo z).

(1,0 ponto) (b) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ na região exterior à casca cilíndrica ($\rho > b$).

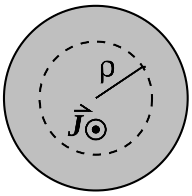
(0,5 ponto) (c) Desenhe um gráfico de $|\vec{B}|$ em função da coordenada cilíndrica ρ.

Solução

Usaremos no item (a) e no item (b) a lei de Ampère:

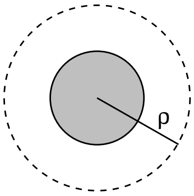
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

(a) Para $\rho < a$



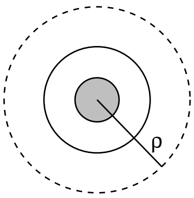
$$B 2\pi\rho = \mu_0 J \pi \rho^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{2} \rho \hat{\phi}}$$

Para $a < \rho < b$



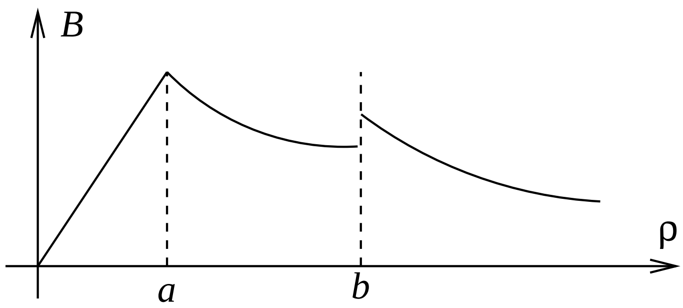
$$B 2\pi\rho = \mu_0 J \pi a^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J a^2}{2} \frac{1}{\rho} \hat{\phi}}$$

(b) Para $\rho > b$



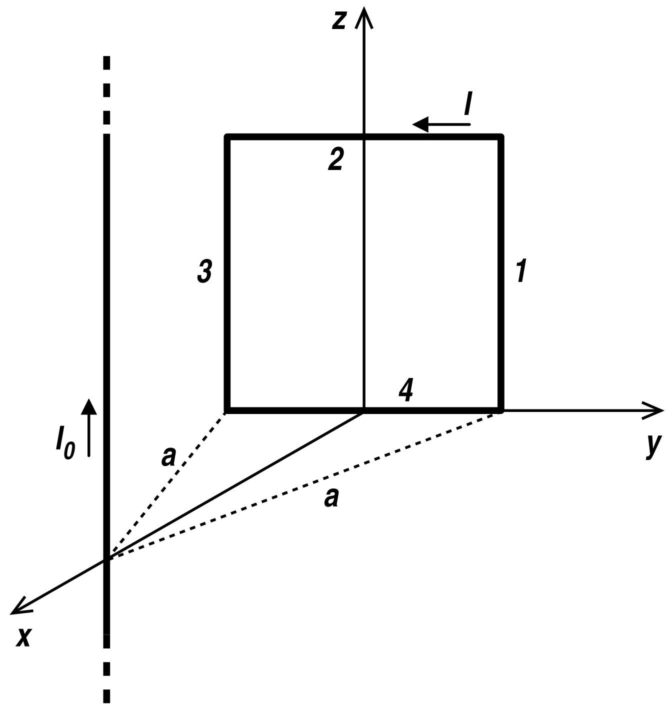
$$B 2\pi\rho = \mu_0 J \pi a^2 + \mu_0 K 2\pi b \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}(J a^2 + 2Kb) \frac{1}{\rho} \hat{\phi}}$$

(c) Esboço do gráfico de $B \times \rho$



Questão 4

Considere uma espira quadrada de lado a, carregando uma corrente I, localizada no plano yz, de acordo com a figura. A espira pode girar livremente em torno do eixo z. Considere ainda um fio infinito, paralelo ao eixo z, de forma que a distância entre o fio e os lados verticais da espira é a (veja a figura). Pelo fio passa uma corrente I_0.



(1,0 ponto) (a) Calcule o campo do fio infinito: $\vec{B}_1$ sobre o lado vertical 1 da espira e $\vec{B}_3$ sobre o lado vertical 3 da espira.

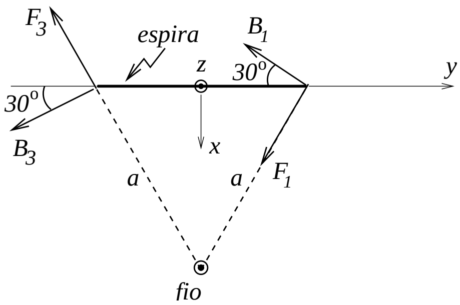
(1,0 ponto) (b) Calcule as forças: $\vec{F}_1$ sobre o lado vertical 1 da espira e $\vec{F}_3$ sobre o lado vertical 3 da espira.

(0,5 ponto) (c) Calcule o torque $\vec{\tau}$ das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ sobre a espira, em relação ao centro da espira, quando ela está no plano yz como na figura.

Solução

(a) O módulo do campo produzido pelo fio é dado por (veja o exemplo 22.7 do livro texto)

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$



A distância entre o fio e os lados 1 e 3 é a.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\left(-\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right)$$

(b) Sobre os lados 1 e 3 da espira $\vec{B}$ é constante, assim $\vec{F} = I\vec{\ell} \times \vec{B}$

$$\vec{F}_1 = I\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_1 = I(a\vec{k}) \times \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\left(-\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}\right)$$

$$\vec{F}_3 = I\vec{\ell}_3 \times \vec{B}_3 = I(-a\vec{k}) \times \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\left(\frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}\right) = \frac{\mu_0 I I_0}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath}\right)$$

(c) O torque das forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ é dado por

$$\vec{\tau} = \left(\frac{a}{2}\vec{\jmath}\right) \times \vec{F}_1 - \left(\frac{a}{2}\vec{\jmath}\right) \times \vec{F}_3 = -\frac{\mu_0 I I_0 a\sqrt{3}}{4\pi}\vec{k}$$