P3

# Física III

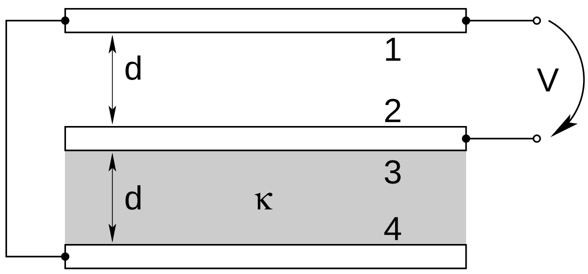
Escola Politécnica - 2005

FGE 2203 - GABARITO DA P3

**30 de junho de 2005**

## Questão 1

Considere um capacitor formado por três placas condutoras planas de área $A$ e separados de uma distância $d$ entre si. O espaço entre a placa inferior e a placa interna é preenchido por um material dielétrico de constante dielétrica $\kappa$. As placas externas, ligadas por um fio condutor, estão a um potencial $V > 0$ em relação à placa interna.




Desprezando o efeito das bordas calcule:

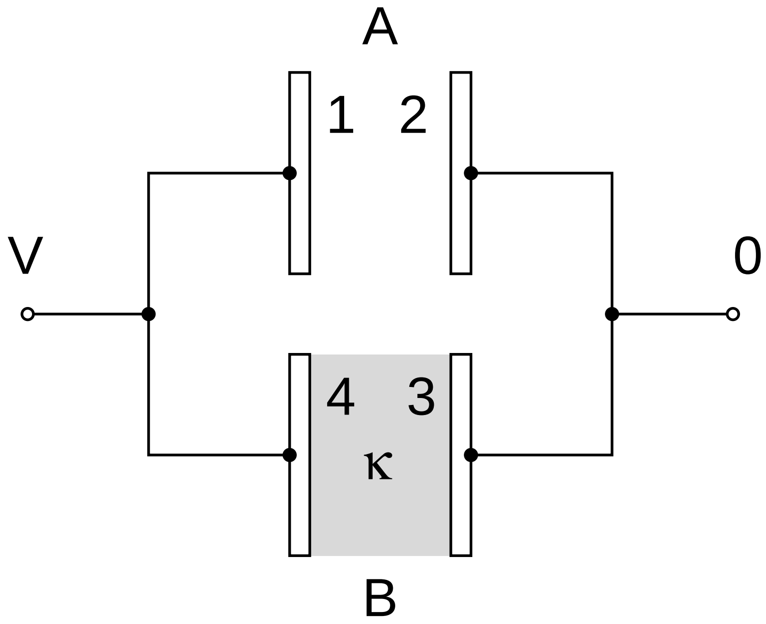
(a) (1,0 ponto) A capacitância do capacitor.

(b) (1,0 ponto) As cargas $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ e $Q_4$ nas faces 1, 2, 3 e 4 dos condutores.

(c) (0,5 ponto) As cargas $Q_3'$ e $Q_4'$ induzidas nas superfícies superior e inferior, respectivamente, do dielétrico.

**SOLUÇÃO**

(a) O capacitor equivale a uma associação em paralelo de dois capacitores de placas paralelas.




Portanto,

$$C = C_A + C_B = \frac{\epsilon_0 A}{d} + \kappa\frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C = (1+\kappa)\frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

(b) As cargas nas faces 1 e 2 são dadas por

$$Q_1 = C_A V \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q_1 = \frac{\epsilon_0 AV}{d} = -Q_2}$$

As cargas nas faces 3 e 4 são dadas por

$$Q_4 = C_B V \quad \Longrightarrow \quad \boxed{Q_4 = \kappa\frac{\epsilon_0 AV}{d} = -Q_3}$$

(c) O campo elétrico no interior do dielétrico é, em módulo,

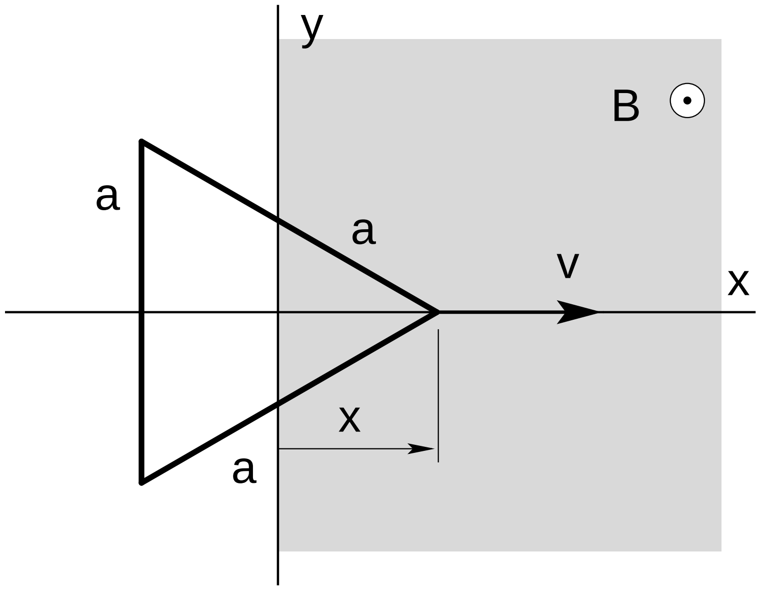
$$E = E_0 - E_{\text{ind.}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{V}{d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{\text{ind.}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_4}{\epsilon_0 A} - \frac{Q_3'}{\epsilon_0 A} = \frac{\kappa V}{d} - \frac{Q_3'}{\epsilon_0 A}.$$

Portanto,

$$\boxed{Q_3' = (\kappa - 1)\frac{\epsilon_0 AV}{d} = -Q_4'}$$

## Questão 2

Uma espira em forma de um triângulo equilátero de lado $a$ está no plano $xy$ como indicado na figura. A resistência da espira é $R$. No semi-espaço $x > 0$ existe um campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, onde $B > 0$. Uma força externa movimenta a espira para a direita com velocidade constante $v$.




(a) (0,5 pontos) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da força eletromotriz induzida. Justifique.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente induzida $I$ como função da posição $x$ do vértice do triângulo. Esboce o gráfico de $I$ como função de $x$ para $x \in (-\infty, \infty)$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a potência dissipada na espira devido à resistência $R$.

(d) (0,5 ponto) Calcule a força externa $\vec{F}$.

**SOLUÇÃO**

(a) Para $x < 0$ a espira está fora do campo magnético, enquanto para $x > a\sqrt{3}/2$ ela está inteiramente no campo magnético. Em ambos os casos não há variação do fluxo magnético e não há fem induzida. Para $0 < x < a\sqrt{3}/2$ o fluxo magnético aumenta no sentido de $\widehat{\mathbf{z}}$. Pela lei de Lenz, a fem induzida será no sentido de produzir um fluxo no sentido de $-\widehat{\mathbf{z}}$ . Portanto a fem induzida terá o sentido horário.

(b) O fluxo magnético através da espira para $0 < x < a\sqrt{3}/2$ é dada por

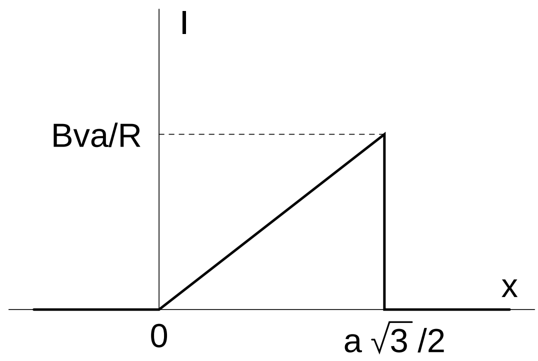
$$\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dA = -BA = -\frac{\sqrt{3}}{3} B x^2,$$

onde escolhemos $\widehat{\mathbf{n}} = -\widehat{\mathbf{z}}$. Portanto a fem induzida é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{2\sqrt{3}}{3} B x \frac{dx}{dt} = \frac{2\sqrt{3}}{3} B x v.$$

A corrente induzida é

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \implies \boxed{I = \frac{2\sqrt{3} B v x}{3R}}$$




(c) A potência dissipada na espira é

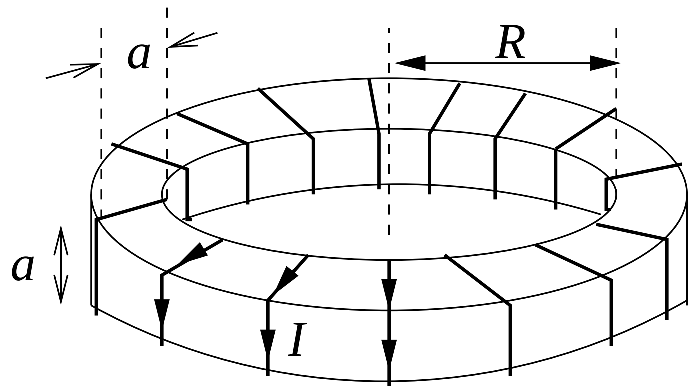
$$P = RI^2 \qquad \implies \qquad \boxed{P = \frac{4B^2 v^2 x^2}{3R}}$$

Pela lei de conservação de energia, essa potência deve ser igual à potência suprida pela força externa. Logo,

$$P = Fv \qquad \implies \qquad \boxed{F = \frac{4B^2 v x^2}{3R}}$$

## Questão 3

Um material magnético com susceptibilidade $\chi_m$ tem a forma toroidal de seção quadrada de lado $a$ e raio interno $R$. Em torno desse núcleo são enroladas $N$ voltas de fio de forma compacta e uniforme.




(a) (1,0 pontos) Pelo fio flui uma corrente constante $I$. Determine os campos **H**, **B** e **M** no interior do núcleo, em função da distância $r$ ao eixo do solenóide.

(b) (1,0 pontos) Determine a auto-indutância da bobina toroidal.

(c) (0,5 pontos) Se pelo fio flui uma corrente variável $I = I_0 \cos \omega t$, determine a fem induzida $\mathcal{E}$.

$\boxed{\textbf{SOLUÇÃO}}$

(a) Devido à simetria toroidal, as linhas do campo $\mathbf{H}$ serão círculos concêntricos ao eixo da bobina toroidal, $\mathbf{H} = H\widehat{\phi}$. Aplicando a lei de Ampère temos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I_{\text{total}} \quad \Longrightarrow \quad H(2\pi r) = NI \quad \Longrightarrow \quad H = \frac{NI}{2\pi r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{H} = \frac{NI}{2\pi r}\widehat{\phi}}$$

A magnetização é

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{M} = \chi_m \frac{NI}{2\pi r}\widehat{\phi}}$$

O campo magnético é

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\frac{NI}{2\pi r}\widehat{\phi}}$$

(b) O fluxo magnético através do enrolamento da bobina é

$$\begin{aligned}\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = N\int_R^{R+a} B(r)(adr) = \mu_0(1+\chi_m)\frac{N^2 Ia}{2\pi}\int_R^{R+a}\frac{dr}{r} \\ = \mu_0(1+\chi_m)\frac{N^2 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right).\end{aligned}$$

A auto-indutância é dada por

$$L = \frac{\Phi_m}{I} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \mu_0(1+\chi_m)\frac{N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$$

(c) A fem induzida é dada por

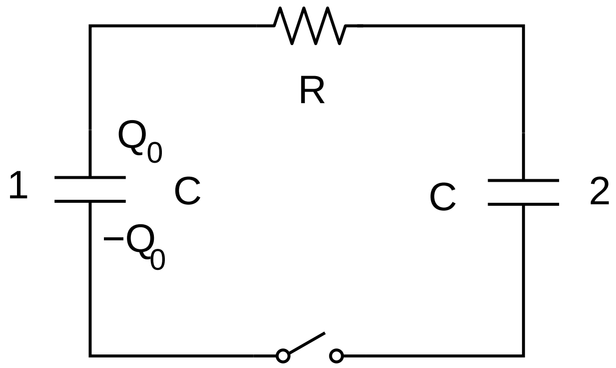
$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} = LI_0\omega \operatorname{sen}\omega t.$$

Portanto,

$$\boxed{\mathcal{E} = \mu_0(1+\chi_m)\frac{N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right) I_0\omega \operatorname{sen}\omega t}$$

## Questão 4

Considere um circuito formado por um resistor de resistência $R$ e dois capacitores de capacidades iguais a $C$. O capacitor 1 está carregado com carga $Q_0 > 0$ na placa superior e $-Q_0$ na placa inferior, e o capacitor 2 está descarregado. A chave é fechada no instante $t = 0$.




(a) (1,0 ponto) Determine a corrente no circuito como função do tempo para $t > 0$.

(b) (0,5 pontos) Determine as energias inicial $U_i$ em $t = 0$, e final $U_f$ em $t = \infty$, armazenadas nos capacitores.

(c) (1,0 ponto) Se $U_f < U_i$ explique o que aconteceu com a energia faltante. Demonstre a sua afirmação.

**SOLUÇÃO**

(a) Sejam $Q_1$ e $Q_2$ as cargas nas placas superiores dos capacitores 1 e 2, respectivamente. Adotamos o sentido horário como o sentido positivo da corrente $I$. A soma das quedas de potenciais ao longo do circuito deve ser nulo. Percorrendo o circuito no sentido horário temos

$$RI + \frac{Q_2}{C} - \frac{Q_1}{C} = 0.$$

No instante $t = 0$ temos $Q_1 = Q_0$ e $Q_2 = 0$. Portanto, a corrente no instante $t = 0$ é $I(0) = Q_0/RC$. Derivando em relação a $t$ obtemos

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} + \frac{I}{C} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{I} = -\frac{2}{RC}dt \quad \Longrightarrow \quad \int_{Q_0/RC}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{2}{RC}\int_0^t dt$$

Portanto,

$$\boxed{I(t) = \frac{Q_0}{RC}\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)}$$

(b) Em $t = 0$ toda a energia está armazenada no capacitor 1. Portanto,

$$\boxed{U_i = \frac{Q_0^2}{2C}}$$

Em $t = \infty$ temos $I(\infty) = 0$, de modo que $Q_1 = Q_2$. Como $Q_1 + Q_2 = Q_0$, concluímos que $Q_1 = Q_2 = Q_0/2$. Portanto a energia armazenada nos capacitores é

$$U_f = \frac{(Q_0/2)^2}{2C} + \frac{(Q_0/2)^2}{2C} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_f = \frac{Q_0^2}{4C}}$$

(c) A energia faltante $W = U_i - U_f = Q_0^2/4C$ foi dissipada no resistor pelo efeito Joule. De fato,

$$W = \int_0^\infty P(t)dt = R\int_0^\infty I(t)^2 dt = \frac{Q_0^2}{RC^2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{4t}{RC}\right)dt = \frac{Q_0^2}{4C}.$$