PS

Física III

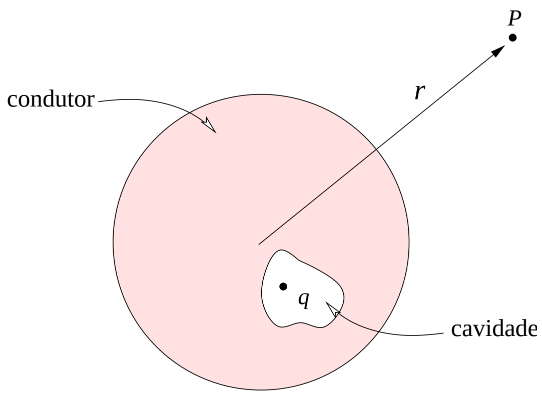
Escola Politécnica - 2005

FGE 2203 - GABARITO DA PS

7 de julho de 2005

Questão 1

Um condutor descarregado, esférico e centrado na origem possui uma cavidade de forma e localização qualquer como mostra a figura ao lado. Em um ponto qualquer do interior da cavidade há uma carga q.



(0,5 ponto) (a) Use a lei de Gauss para determinar a carga na superfície da cavidade.

(1,0 ponto) (b) Determine a carga na superfície externa do condutor. Como esta carga está distribuida sobre a superfície? Justifique sua resposta.

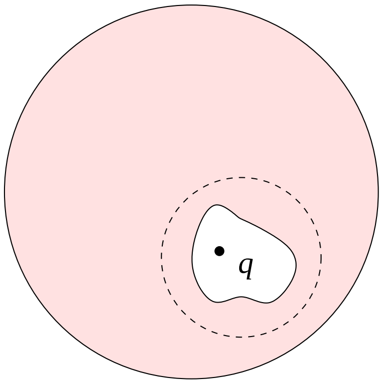
(1.0 ponto) (c) Calcule o campo elétrico no ponto P exterior à esfera.

Solução

(a) Tomando uma superfície gaussiana que engloba a cavidade e está contida no interior do condutor (veja figura abaixo) e levando em conta que o campo elétrico é nulo no interior do condutor, a lei de Gauss nos diz que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 = \frac{q + q_{\text{cav.}}}{\epsilon_0}.$$

Portanto $q_{\text{cav.}} = -q$.



(b) Como a carga se distribui sempre na superfície do condutor e a esfera está descarregada, concluímos (usando o resultado do ítem anterior) que a carga na superfície externa é $+q$. A distribuição sobre a superfície esférica é uniforme, uma vez que a influência da carga puntiforme q é completamente cancelada pela distribuição induzida na superfície da cavidade.

(c) Usando a simetria esférica e uma superfície gaussiana de raio r

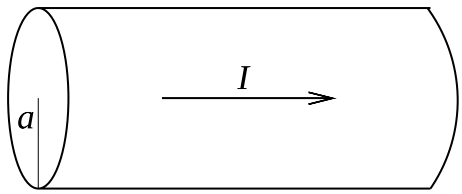
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = E_r \, 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Portando o campo elétrico possui somente a componente radial

$$E_r = \frac{1}{4\pi \, \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Questão 2

Uma corrente estacionária I flui por um fio longo, de raio a. Ver figura abaixo.



(1,0 ponto) (a) Calcule o campo magnético $\vec{B}_1$ (dentro do fio) e $\vec{B}_2$ (fora do fio), se a corrente é uniformemente distribuída na superfície externa do fio.

Suponha, agora, que a corrente é distribuída de forma que a densidade de corrente $J = kr$, onde r é a distância até o eixo do fio.

(0,5 ponto) (b) Calcule a constante k em função da corrente I.

(1,0 ponto) (c) Calcule o campo magnético $\vec{B}_1$ (dentro do fio) e $\vec{B}_2$ (fora do fio) para essa densidade de corrente. Expresse seus resultados em função de I.

Solução

(a) Toda corrente está na superfície do fio e portanto, da lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{int}$$

<u>Para $r < a$</u> : $\vec{B}_1 = \vec{0}$

<u>Para $r > a$</u> : $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$

(b) Temos agora uma densidade de corrente cujo módulo é proporcional à distância r ao eixo do fio, ou seja, $J = kr$. Para determinar k usamos

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^a kr(2\pi r)dr = \frac{2\pi k a^3}{3} \Longrightarrow k = \frac{3I}{2\pi a^3}$$

(c) Na lei de Ampère, <u>a uma distância $r < a$</u> do eixo do fio:

$$I_{int} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^r k\overline{r}(2\pi\overline{r})d\overline{r} = \frac{Ir^3}{a^3},$$

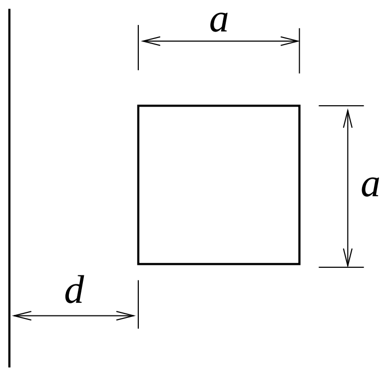
e <u>a uma distância $r > a$:</u> $I_{int} = I$. Portanto,

<u>Para $r < a$</u> : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi a^3}\hat{\phi}$

<u>Para $r > a$</u> : $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}$

Questão 3

Uma espira quadrada condutora de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor infinito a uma distância d.



(1,5 ponto) (a) Calcule a indutância mútua do sistema.

(1,0 ponto) (b) Se o fio infinito é percorrido de baixo para cima por uma corrente $I = At$, onde t é o tempo e A é uma costante positiva, calcule a corrente induzida i na espira quadrada. Determine e explique o sentido da corrente induzida.

Solução

(a) O fluxo magnético na espira produzido por uma corrente I no fio infinito é

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_d^{d+a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) (adr) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{a+d}{d} \right).$$

A indutância mútua é

$$M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{a+d}{d} \right).$$

(b) A fem induzida na espira é

$$\mathcal{E} = -M \frac{dI}{dt} = -MA = -\frac{\mu_0 a A}{2\pi} \ln \left(\frac{a+d}{d} \right).$$

Portanto a corrente induzida é em módulo,

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{MA}{R} = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R} \ln \left(\frac{a+d}{d} \right).$$

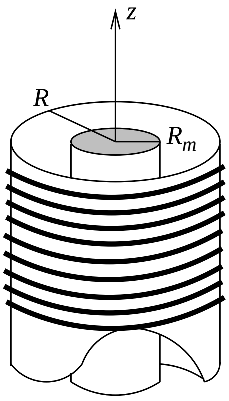
O fluxo magnético na espira produzido pela corrente no fio aumenta para dentro da página. Conforme a lei de Lenz, a fem induzida na espira procura compensar esse aumento produzindo um fluxo magnético para fora da página. Portanto, a corrente induzida é no sentido anti-horário.

Questão 4

Considere um solenóide cilíndrico longo, de raio R, com n espiras por unidade de comprimento, inicialmente no vácuo, percorrido por uma corrente I.

(1.0 ponto) (a) Calcule os vetores $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$ a uma distância $0 < r < R$.

Agora, o solenóide é preenchido parcialmente com um cilindro maciço longo de material com $\chi_m = -10^{-4}$ e raio $R_m < R$, coaxial com o solenóide, veja a figura.



(1.0 ponto) (b) Calcule os vetores $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{M}$ a uma distância $0 < r < R$ ($R \neq R_m$).

(0,5)ponto) (c) Qual é a característica magnética desse material? Justifique.

Solução

(a) Para $0 < r < R$

$$\boxed{\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = nI\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{0}}$$

(b) Para $0 < r < R_m$

$$\boxed{\vec{B} = (1+\chi_m)\vec{B}_0 = \mu_0(1+\chi_m)nI\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = nI\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}\vec{k} = \chi_m nI\vec{k}}$$

Para $R_m < r < R$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_0}$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{0}}$$

(c) O material é diamagnético ($\chi_m = -10^{-4} < 0$).