P1

Física III

Escola Politécnica - 2006

FGE 2203 - 1^a AVALIAÇÃO

6 de abril de 2006

$\diamondsuit$ **Esta avaliação tem 100 minutos de duração.**

$\diamondsuit$ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

$\diamondsuit$ É proibido o uso de calculadoras.

$\diamondsuit$ Resolva cada questão na folha apropriada.

$\diamondsuit$ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

(a) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico (módulo e direção) produzido por um fio semi-infinito com densidade linear de carga $\lambda_0 > 0$ num ponto P a uma distância L da extremidade (considere o fio sobre o semi-eixo z negativo e P em $(0, 0, L)$).

(b) (1,0 ponto) Um anel de raio $\underline{a}$ e densidade linear de carga $-\lambda_0 < 0$ tem seu centro situado no ponto $(0, 0, 0)$ e está contido no plano $z = 0$. Determine o campo elétrico produzido pelo anel no ponto P em $(0, 0, L)$.

(c) (0,5 ponto) Em que ponto(s) do eixo z a força sobre uma carga Q produzida pelos campos do fio e do anel será nula? (*Determine apenas a equação que deve ser satisfeita.)*

Questão 2

Considere dois cilindros de comprimento L, ocos, metálicos e coaxiais de raios a e b ($b > a$). As paredes cilíndricas são muito finas e os cilindros muito longos ($L >> a, b$). O cilindro interno possui uma carga $Q_0 > 0$ e o externo uma carga $-Q_0$.

(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Gauss, na aproximação de cilindros de comprimento infinito, determine o campo em todo o espaço.

(b) (1,0 ponto) Qual é a capacitância por unidade de comprimento do sistema?

(c) (0,5 ponto) Calcule a diferença de potencial entre os dois cilindros quando o espaço entre eles é preenchido por um material de constante dielétrica κ.

Questão 3

Duas cargas pontuais $+q$ e $-q$ estão situadas em $(0, 0, d)$ e $(0, 0, -d)$, respectivamente.

(a) (1,0 ponto) Determine o potencial produzido pelas cargas num ponto do espaço com coordenadas (X,Y,Z).

(b) (0,5 ponto) Qual é o potencial sobre o eixo x ?

(c) (1,0 ponto) Determine a componente E_z do campo elétrico sobre o eixo x, a partir da função potencial $V(X, Y, Z)$.

Questão 4

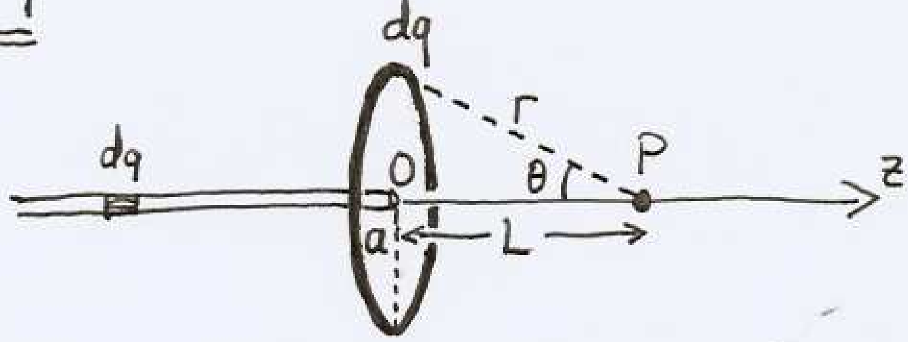
Duas esferas metálicas de raios externos R_1 e R_2 (com $R_2 > R_1$) possuem cargas totais positivas Q_1 e Q_2, respectivamente. As duas esferas estão muito distantes uma da outra de modo que a distribuição das cargas nas esferas não é afetada numa esfera pela presença da outra. A esfera de raio R_1 é oca, e possui um raio interno R_0. Determine:

(a) (1,0 ponto) O potencial de cada uma das esferas em função da sua carga e do seu raio e a densidade superficial de carga $\sigma(R_i)$ em cada uma das superfícies de raio R_0, R_1 e R_2,

(b) (1,5 ponto) As duas esferas são colocadas em contato elétrico por meio de um longo fio condutor, de modo que as novas distribuições de carga que ocorrem não afetam a simetria esférica das distribuições de cargas. Calcule a carga final Q_{2f} da esfera de raio R_2 e o novo potencial V_f das esferas em função dos parâmetros iniciais.

GABARITO DA P1

Questão 1



(a) O campo produzido pelo fio é

$$\boxed{\vec{E}_{fio} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{e}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda_0\, dz}{(L-z)^2}\,\hat{e}_z = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L}\,\hat{e}_z}$$

(b) O campo produzido pelo anel é

$$\vec{E}_{anel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\cos\theta\,\hat{e}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}\underbrace{\int dq}_{=\,-2\pi a\lambda_0}\,\hat{e}_z$$

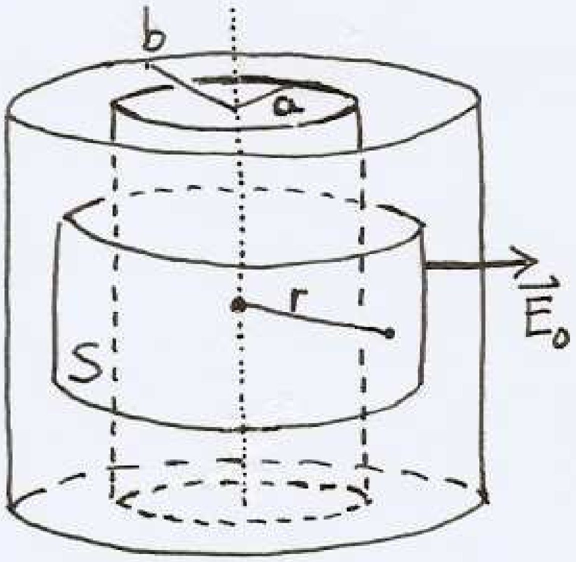
$$\boxed{\vec{E}_{anel} = -\frac{2\pi a\lambda_0 L\,\hat{e}_z}{4\pi\varepsilon_0 (L^2+a^2)^{3/2}}}$$

(c) O campo $\vec{E}$ resultante se anula em $z=L$ dado por

$$\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{L} - \frac{2\pi a\lambda_0 L}{4\pi\varepsilon_0 (L^2+a^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{L^2\, 2\pi a}{(L^2+a^2)^{3/2}} = 1}$$

Questão 2



(a) Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

O campo tem simetria cilíndrica, $\vec{E}_0 = E_0(r)\,\hat{e}_r$. É conveniente escolher uma superfície S cilíndrica e coaxial com os cilindros. Assim,

$$\vec{E}_0(r) = \begin{cases} \vec{0}, & r < a \\ \dfrac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{e}_r, & a < r < b \\ \vec{0}, & r > b \end{cases}$$

(b) A capacitância por unidade de comprimento

$$C_L = \frac{C}{L} = \frac{Q}{|V_{ab}|\,L} = \frac{\lambda_0}{|V_{ab}|} \quad \left(\lambda_0 \equiv \frac{Q}{L}\right)$$

$$|V_{ab}| = \left| -\int_a^b \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} \right| = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_L = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}$$

(c) O campo elétrico com o dielétrico, $\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{K}$.

$$\Longrightarrow |V'_{ab}| = \left| -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \right| = \frac{1}{K} \left| -\int_a^b \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} \right| = \frac{|V_{ab}|}{K}$$

$$\boxed{|V'_{ab}| = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 K} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

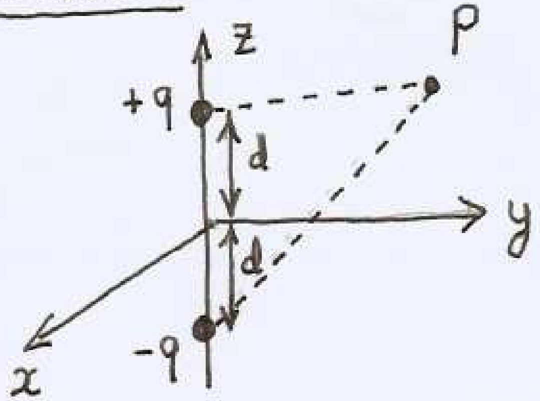
<u>Outra solução</u>:

Após a introdução do dielétrico, a capacitância aumenta

$$C_K = K C_0 \Rightarrow \frac{\lambda_0}{|V'_{ab}|} = K \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{|V'_{ab}| = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 K} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Questão 3



(a) O potencial no ponto P é a soma dos potenciais produzidos por +q e -q

$$\boxed{V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{1/2}}\right\}}$$

(b) No eixo x, $z=y=0$, portanto

$$\boxed{V(x,0,0) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(x^2+d^2)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+d^2)^{1/2}}\right\} = 0}$$

Analogamente, no eixo y, $V(0,y,0)=0$

No eixo z, $x=y=0$ e

$$V(0,0,z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|z-d|} - \frac{1}{|z+d|}\right\}$$

(c) $E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}$

$$E_x(x,y,z) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-x}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{x}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right\}$$

No eixo x, $y = z = 0$ e $E_x(x,0,0) = 0$.

Analogamente, $E_y(x,0,0) = 0$

$$E_z(x,y,z) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right\}$$

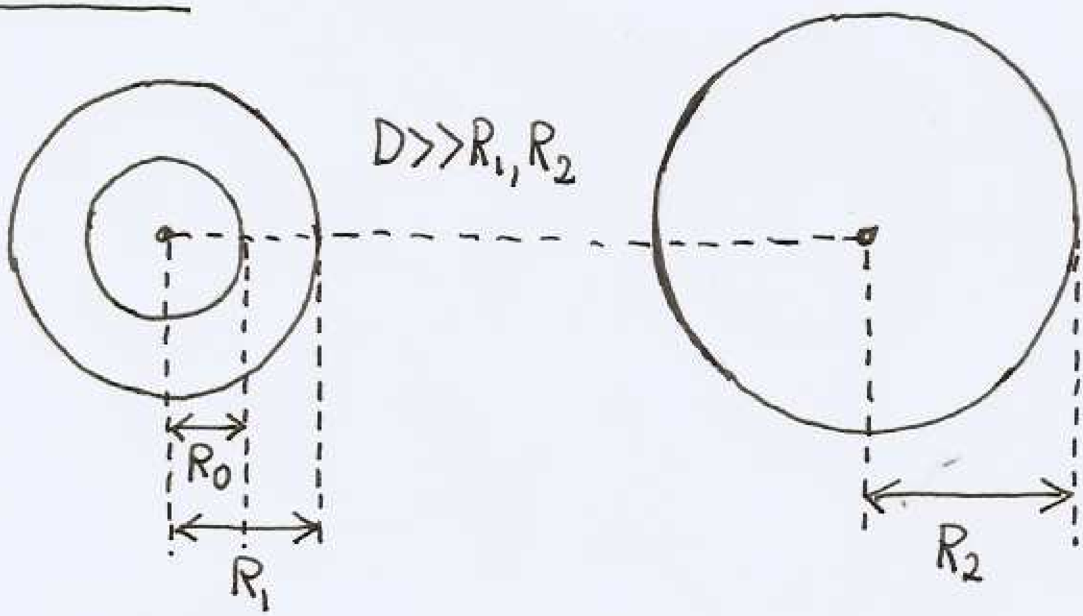
No eixo x,

$$\boxed{E_z(x,0,0) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{d}{(x^2+d^2)^{3/2}} + \frac{d}{(x^2+d^2)^{3/2}}\right\} = \frac{-2qd}{4\pi\varepsilon_0(x^2+d^2)^{3/2}}}$$

Assim, apesar de $V(x,0,0)$ ser nulo, o campo

$\vec{E}(x,0,0) = E_z(x,0,0)\,\hat{e}_z \neq \vec{0}$.

Questão 4



(a) O potencial de uma esfera condutora de raio R e carga Q é dado por $V = Q/4\pi\varepsilon_0 R$. Assim,

$$V_1(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \quad e \quad V_2(R_2) = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Não há carga na superfície interna da esfera 1

$$\Rightarrow \sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad e \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

(b) Sejam Q_1' e Q_2' as novas cargas nas esferas após serem ligadas. Como a carga se conserva

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \Rightarrow \boxed{Q_1' = Q_1 + Q_2 - Q_2'} \quad (A)$$

Após serem ligadas, as duas esferas ficam no mesmo potencial.

$$V' \equiv V_1' = V_2' \Rightarrow \frac{Q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{Q_1'}{R_1} = \frac{Q_2'}{R_2}} \quad (B)$$

$$(A) \rightarrow (B) \Rightarrow \boxed{Q_2' = \frac{(Q_1+Q_2)R_2}{R_1+R_2}}, \quad \boxed{V' = V_2' = \frac{Q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0(R_1+R_2)}}.$$