P2

Física III

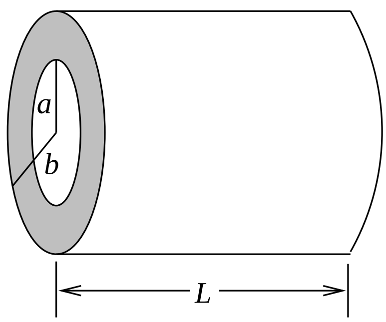
Escola Politécnica - 2006

FGE 2203 - GABARITO DA P2

25 de maio de 2006

Questão 1

Constrói-se um resistor pela moldagem de um material de resistividade ρ, na forma de um cilindro oco de comprimento L e raio interno a e externo b, como mostra a figura.

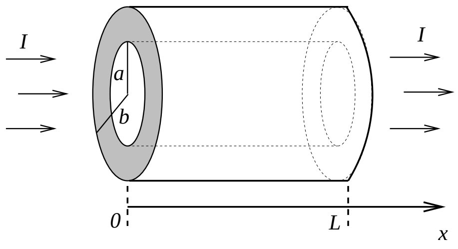


(a) (1,0 ponto) O resistor opera com uma diferença de potencial entre as bases do cilindro percorrido por uma corrente paralela ao eixo. Achar uma expressão geral da resistência deste resistor em termos de L, ρ, a e b.

(b) (1,5 ponto) Suponha agora que a diferença de potencial seja aplicada entre as superfícies laterais, interna e externa, de modo que a corrente flui radialmente, para fora no resistor. Achar uma expressão geral da resistência do resistor em termos de L, ρ, a e b.

SOLUÇÃO

(a)

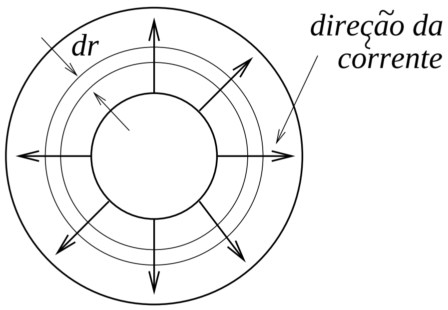


$$dR = \rho \frac{dx}{A} \qquad \text{onde} \qquad A = \pi(b^2 - a^2)$$

$$\therefore \quad R = \rho \int_0^L \frac{dx}{A} = \frac{\rho L}{\pi(b^2 - a^2)}$$

$$\boxed{R = \frac{\rho L}{\pi(b^2 - a^2)}}$$

(b)



$$dR = \rho \frac{dx}{A(r)} \qquad \text{onde} \qquad A(r) = 2\pi r L$$

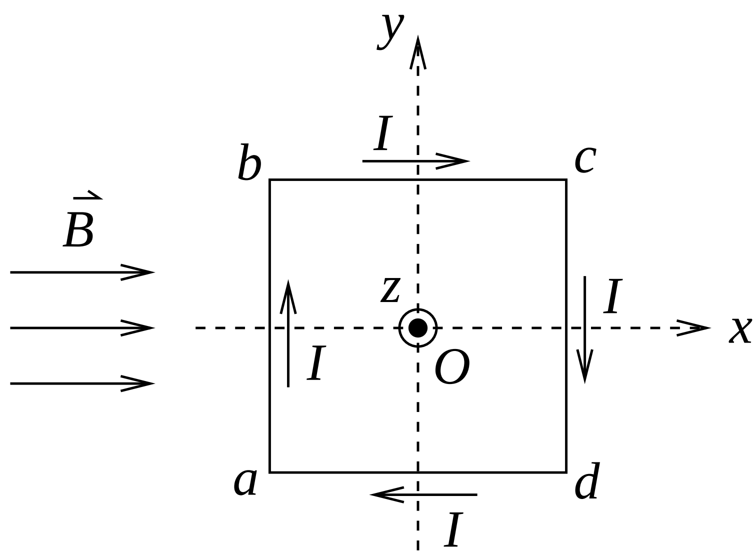
$$\text{Assim,} \quad dR = \frac{\rho}{2\pi L}\frac{dr}{r}$$

$$R = \int_a^b dR = \frac{\rho}{2\pi L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Questão 2

Uma bobina quadrada de lado ℓ é constituída por N espiras, sendo I a corrente que percorre cada espira. Ela pode girar em torno de um eixo y, conforme vemos na figura e está submetida a um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{\imath}$.



(a) (1,0 ponto) Calcule as forças magnéticas sobre os lados da bobina.

(b) (1,0 ponto) Calcule o torque em torno do eixo y de cada uma das forças que atuam nos lados da bobina e o torque total.

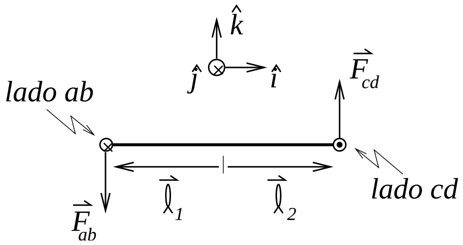
(c) (0,5 ponto) Qual é o momento magnético $\vec{\mu}$ da bobina? Escreva o torque $\vec{\tau}$ em função de $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$.

SOLUÇÃO

(a) Definindo $I^* \equiv NI$, temos

$$\begin{cases} \vec{F}_{ab} = I^*\vec{\ell}_{ab} \times \vec{B} = I^*(\ell\,\hat{\jmath}) \times (\vec{B}\,\hat{\imath}) = -I^*\ell B\,\hat{k} \\ \vec{F}_{cd} = I^*\vec{\ell}_{cd} \times \vec{B} = I^*(-\ell\,\hat{\jmath}) \times (\vec{B}\,\hat{\imath}) = I^*\ell B\,\hat{k} \\ \vec{F}_{bc} = \vec{F}_{ad} = \vec{0} \quad \text{pois} \quad \vec{\ell}_{bc} \quad \text{e} \quad \vec{\ell}_{ad} \quad \text{são paralelos a } \vec{B} \end{cases}$$

(b)



$$\begin{cases} \vec{\tau}_{ab} = \vec{\ell}_1 \times \vec{F}_{ab} = -\dfrac{\ell}{2}F_{ab}\hat{\jmath} \\ \\ \vec{\tau}_{cd} = \vec{\ell}_2 \times \vec{F}_{cd} = -\dfrac{\ell}{2}F_{cd}\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\ell}_1 = -\dfrac{\ell}{2}\hat{\imath} \\ \vec{\ell}_2 = \dfrac{\ell}{2}\hat{\imath} \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{ab} + \vec{\tau}_{cd} = -\frac{\ell}{2}(F_{ab} + F_{cd})\,\hat{\jmath} = -I^*\ell^2 B\,\hat{\jmath}$$

$$\therefore \qquad \boxed{\vec{\tau} = -I^*\ell^2 B\,\hat{\jmath}}$$

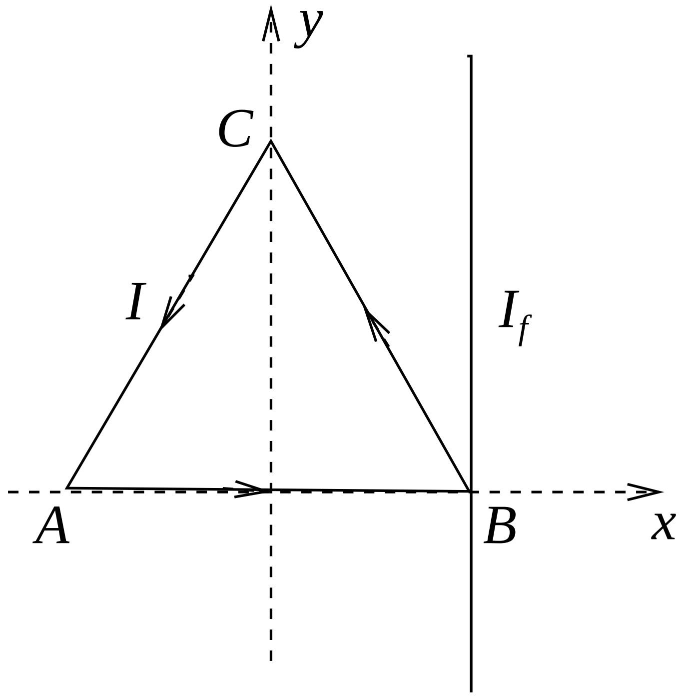
(c)

$$\vec{\mu} = I_{total}\vec{A} = -I^*\ell^2\hat{k} = -\mu\hat{k}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (-\mu\hat{k}) \times (B\hat{\imath}) = -\mu B\hat{\jmath} = -I^*\ell^2 B\,\hat{\jmath}$$

Questão 3

Um fio é dobrado de forma a constituir um triângulo equilátero de lado $\underline{a}$ no qual circula uma corrente I, veja a figura



(a) (1,5 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ em C, devido à corrente circulando no triângulo.

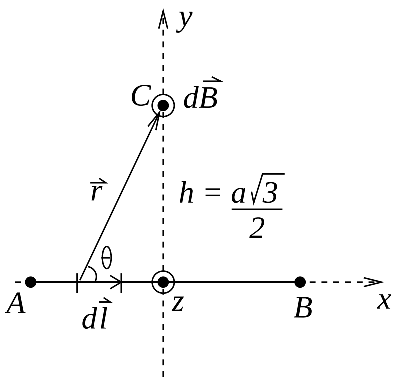
(b) (1,0 ponto) Admita agora, adicionalmente, que um fio retilíneo infinito passando por B, paralelo ao eixo y, conduza uma corrente I_f (a corrente do fio é independente da corrente no triângulo). Qual deve ser o módulo e o sentido da corrente I_f no fio para que o campo em C seja nulo?

SOLUÇÃO

(a) Para calcular o campo usaremos a lei de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Os lados AC e BC não contribuem porque nos dois casos $d\vec{\ell} \parallel \hat{r}$.



Para o lado AB, $d\vec{B}$ aponta na direção de $\hat{k}$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\mathrm{sen}(\theta)\, dx\, \hat{k}.$$

Vamos expressar r e x em função de θ.

$$r = \frac{h}{\mathrm{sen}(\theta)}, \quad x = -h\cot(\theta) \Rightarrow dx = h\csc^2(\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\mathrm{sen}(\theta) d\theta\, \hat{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \mathrm{sen}(\theta) d\theta\, \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\,\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}\,\hat{k} = \frac{\mu_0 I\sqrt{3}}{6\pi a}\,\hat{k}}$$

(b) O campo produzido pelo fio infinito no ponto C é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_f}{2\pi d}\,\hat{k}, \qquad \text{onde} \qquad d = \frac{a}{2}.$$

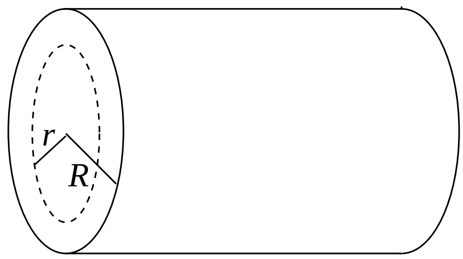
Para cancelar o campo $\vec{B}$ produzido pelo fio, a corrente

$$\boxed{I_f = \frac{\sqrt{3}}{6}\, I}$$

e deve fluir no sentido do vetor $-\hat{\jmath}$.

Questão 4

Em um condutor cilíndrico maciço de raio R passa uma corrente I cuja densidade J varia linearmente com a distância ao eixo do cilindro: $J = \alpha\, r$.



(a) (1,0 ponto) Expresse α em função de I e R.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor $\vec{B}$ para $r < R$.

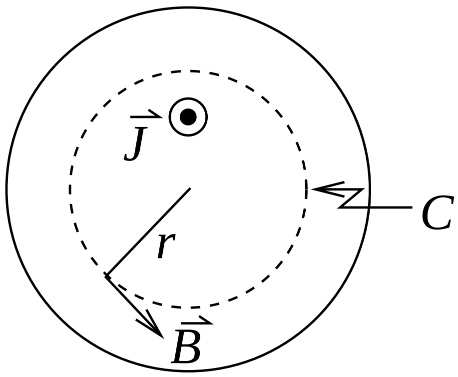
(c) (0,5 ponto) Calcule o vetor $\vec{B}$ para $r > R$.

SOLUÇÃO

(a) A corrente I é dada por

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^R (\alpha r)(2\pi r dr) = \frac{2\pi R^3 \alpha}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3}}$$



(b) O campo tem simetria cilíndrica. Usando a lei de Ampère com o percurso pontilhado C da figura obtemos para $r < R$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I(r)\,,$$

onde

$$I(r) = \int_0^r (\alpha r)(2\pi r dr) = \frac{2\pi r^3 \alpha}{3}\,.$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 r^2 \alpha}{3} = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi R^3}}$$

(c) Se $r > R$, a corrente que atravessa uma superfície limitada por C é I.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) 2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$