P3

Física III

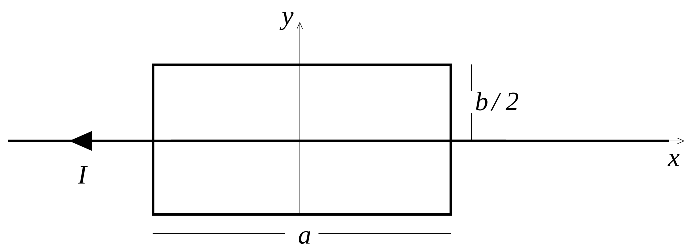
Escola Politécnica - 2006

FGE 2203 - GABARITO DA P3

29 de junho de 2006

Questão 1

Um espira retangular com lados a e b e um fio muito longo passando pelo centro da espira, ambos co-planares, foram superpostos como mostra a figura (onde se acrescentou um sistema de coordenadas x, y). O centro da espira coincide com a origem do sistema de coordenadas. O fio conduz uma corrente I conforme indicado na figura.



(a) (1,0 ponto) Determine o fluxo do campo $\vec{B}$, produzido pelo fio, através da espira.

(b) (0,5 ponto) Numa nova condição, em que o fio é deslocado para a posição $y = b$, determine o novo fluxo do campo $\vec{B}$ através da espira.

(c) (1,0 ponto) Determine a mútua-indutância M entre o fio e a espira, para as condições dos ítens (a) e (b), acima.

$\boxed{\textbf{SOLUÇÃO DA QUESTÃO 1}}$

(a) Usando o resultado para o campo magnético produzido por um fio infinito, teremos, no plano xy,

$$\vec{B}_{xy} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{z}.$$

O fluxo de $\vec{B}$ através da espira pode ser escrito como

$$\phi = \phi_{y<0} + \phi_{y>0}.$$

Como $\vec{B}_{xy}(y<0) = -\vec{B}_{xy}(y>0)$, então

$$\phi_{y<0} = \int_{y<0} \vec{B}_{xy}\cdot\vec{A} = -\phi_{y>0}.$$

Logo $\phi = 0$.

(b) Essa nova configuração é equivalente a deslocar o lado superior da espira até $-b/2$. Desse modo,

$$\phi = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-3b/2}^{-b/2}\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{z}\right)\cdot(\mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{z}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}a\int_{-3b/2}^{-b/2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi}\log(1/3) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\log(3).$$

(c)

$$\text{fem} = -M\frac{dI}{dt} = N\epsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

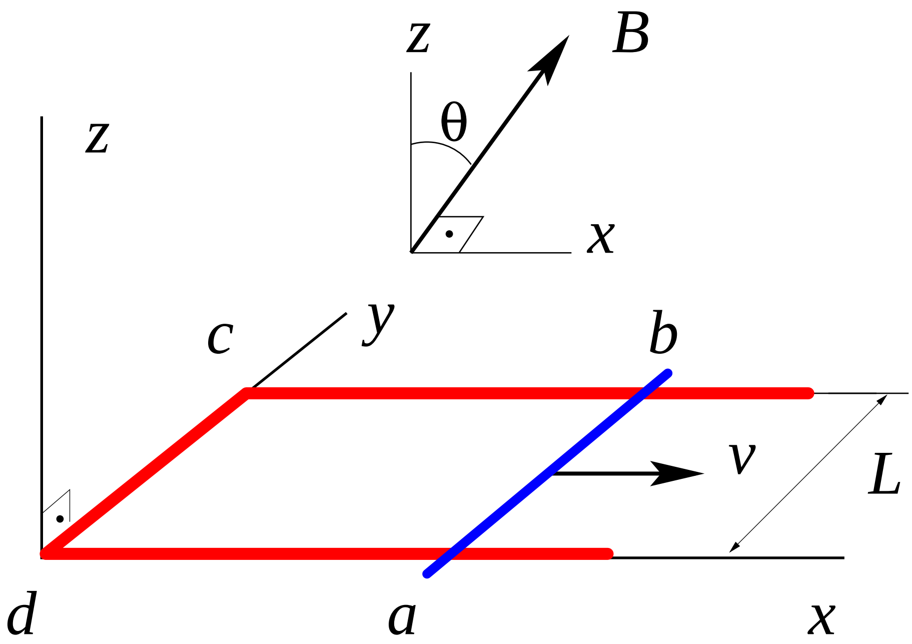
Logo

$$M = \frac{N\phi}{I}$$

Portanto, $M = 0$ e $M = \frac{\mu_0 a}{2\pi}\log(3)$ para os casos dos ítens (a) e (b), respectivemente.

Questão 2

Considere o circuito retangular *abcd* mostrado na figura. O lado *ab* é deslizado no sentido positivo de x com velocidade constante de módulo v. O circuito se encontra num campo magnético uniforme de módulo B perpendicular ao eixo x e fazendo um ângulo θ ($0 \leq \theta < 90°$) com o eixo z.



(a) (0,5 pontos) Determine o sentido (*abcd* ou *dcba*) da força eletromotriz induzida. Justifique a sua resposta.

(b) (1,0 ponto) O circuito *abcd* é feito de um material de resistividade ρ e a área da secção é A. Sabendo-se que o lado *ab* parte de $x = 0$ no instante $t = 0$, determine a corrente I como função do tempo.

(c) (1,0 ponto) Determine, como função do tempo, a força que deve ser aplicada ao lado *ab* para deslocá-lo com velocidade constante v.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

(a) O fluxo do campo magnético aumenta no sentido de $\widehat{\mathbf{z}}$. Segundo a lei de Lenz, a fem induzida será no sentido de produzir um fluxo no sentido de $-\widehat{\mathbf{z}}$. Portanto a fem induzida é no sentido *dcba*.

(b) Orientando a superfície para baixo o fluxo magnético através do circuito é

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \widehat{\mathbf{n}} dA = \mathbf{B} \cdot (-\widehat{\mathbf{z}}) \int_S dA = -B\cos\theta(Lx).$$

A fem induzida é portanto

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B\cos\theta L \frac{dx}{dt} = B\cos\theta L v.$$

A resistência do circuito *abcd* é

$$R = \frac{\rho}{A}[2(x+L)] = \frac{\rho}{A}[2(vt+L)].$$

A corrente induzida é

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I = \frac{ABLv\cos\theta}{2\rho(vt+L)}}$$

(c) A potência dissipada no circuito é

$$P = RI^2 = \frac{AB^2L^2v^2\cos^2\theta}{2\rho(vt+L)},$$

que deve ser igual à potência fornecida,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv.$$

Portanto,

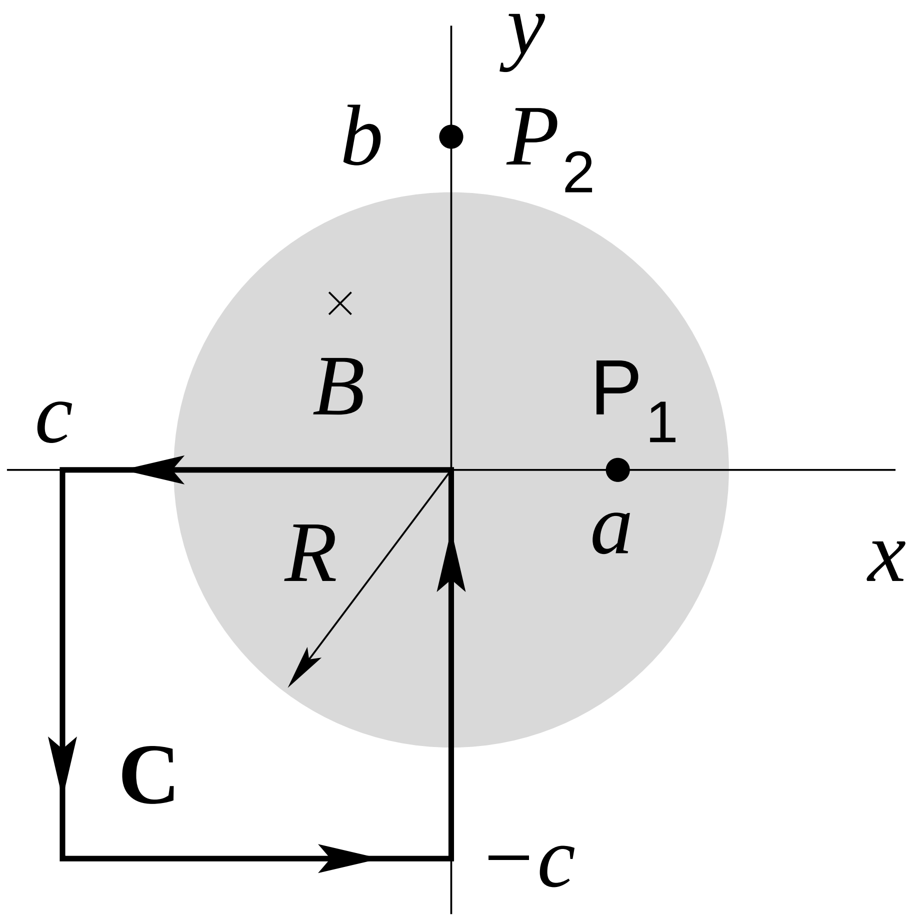
$$F = \frac{P}{v} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{F} = \frac{AB^2L^2v\cos^2\theta}{2\rho(vt+L)}\widehat{\mathbf{x}}}$$

Alternativamente,

$$\mathbf{F} = -I\mathbf{L} \times \mathbf{B} = IL\widehat{\mathbf{y}} \times \mathbf{B} = ILB\cos\theta\widehat{\mathbf{x}} = \frac{AB^2L^2v\cos^2\theta}{2\rho(vt+L)}\widehat{\mathbf{x}}.$$

Questão 3

O campo magnético em todos os pontos de uma região cilíndrica de raio R é uniforme e direcionado para dentro da página, variando com o tempo segundo $B = Kt$, onde K é uma constante positiva.



(a) (1,0 ponto) Determine a circulação do campo elétrico $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ao longo do circuito quadrado $\mathbf{C}$ de lados $c > R$ percorrido no sentido indicado.

(b) (1,5 pontos) Determine o vetor campo elétrico (módulo, direção e sentido) nos pontos $P_1 = (a, 0, 0)$ e $P_2 = (0, b, 0)$, onde $0 < a < R$ e $b > R$.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

(a) Pela lei de Faraday a circulação é dada por

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = -\frac{d}{dt}\left[(-B\widehat{\mathbf{z}})\cdot\left(\frac{\pi}{4}a^2\widehat{\mathbf{z}}\right)\right] = \frac{\pi a^2}{4}\frac{dB}{dt}.$$

Portanto,

$$\boxed{\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{\pi}{4}a^2 K}$$

(b) Devido à simetria cilíndrica $\mathbf{E} = E(r)\widehat{\boldsymbol{\phi}}$, onde $\widehat{\boldsymbol{\phi}}$ é um vetor unitário tangente ao círculo de raio r e orientada no sentido anti-horário. Aplicando a lei de Faraday a um circuito circular de raio a percorrido no sentido anti-horário, temos

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E(r)(2\pi a) = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = (\pi a^2)\frac{dB}{dt} = (\pi a^2)K.$$

Portanto

$$E(r) = \frac{Ka}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{E} = \frac{Ka}{2}\widehat{\boldsymbol{\phi}}.$$

No ponto P_1, $\widehat{\boldsymbol{\phi}} = \widehat{\mathbf{y}}$ e

$$\boxed{\mathbf{E}(P_1) = \frac{Ka}{2}\widehat{\mathbf{y}}}$$

Analogamente, aplicando a lei de Faraday a um circuito circular de raio b percorrido no sentido anti-horário, temos

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = E(r)(2\pi b) = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = (\pi a^2)\frac{dB}{dt} = (\pi a^2)K.$$

Portanto

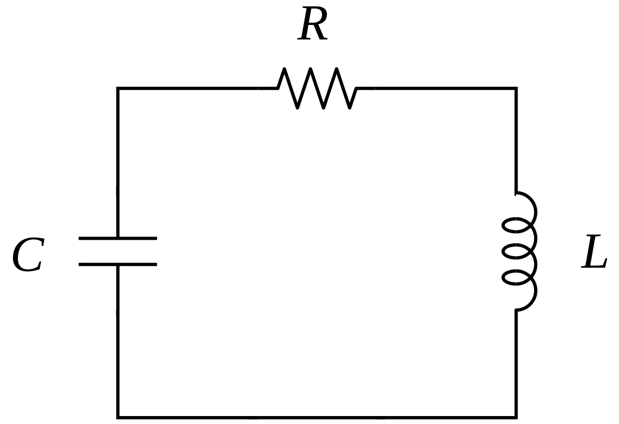
$$E(r) = \frac{Ka^2}{2b} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{E} = \frac{Ka^2}{2b}\widehat{\boldsymbol{\phi}}.$$

No ponto P_2, $\widehat{\boldsymbol{\phi}} = -\widehat{\mathbf{x}}$ e

$$\boxed{\mathbf{E}(P_2) = -\frac{Ka^2}{2b}\widehat{\mathbf{x}}}$$

Questão 4

Considere o circuito RLC mostrado na figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Usando a conservção de energia (desprezando efeitos de radiação)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{q(t)^2}{2C} + \frac{LI(t)^2}{2}\right] = -RI(t)^2$$

e a conservação de carga $dq(t)/dt = I(t)$, obtenha a equação diferencial para a carga $q(t)$ no capacitor.

(b) (0,5 ponto) Mostre que

$$q(t) = \exp(z\,t)$$

é uma possível solução, satisfazendo condições apropriadas. Obtenha os dois possíveis valores de z em termos de R, L e C.

(c) (1,0 ponto) Determine a relação que deve existir entre R, L e C, para que uma superposição adequada das duas possíveis soluções obtidas em (b) seja uma solução oscilatória. Determine a constante de amortecimento e a freqüência de oscilação.

$\boxed{\textbf{SOLUÇÃO DA QUESTÃO 4}}$

(a) A equação de conservação de energia resulta em

$$\frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + LI\frac{dI}{dt} + RI^2 = 0.$$

Usando a conservação de carga e cancelando um fator $I(t)$

$$\frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = 0,$$

ou

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = 0.$$

(b) Substituindo a solução na equação acima e usando $d(\exp(zt))/dt = z\exp(zt)$

$$q(t)\left(z^2 + \frac{R}{L}z + \frac{1}{LC}\right) = 0.$$

Para que a relação seja válida em qualquer instante t, devemos ter $z^2 + \frac{R}{L}z + \frac{1}{LC} = 0$. Logo,

$$z_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}.$$

Note que o mesmo resultado também poderia ser obtido substituindo $q = \exp(zt)$ e $I = z\exp(zt)$ na equação de conservação de energia fornecida no ítem anterior.

(c) De acordo com a fórmula de Euler $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)\right]$ a condição para que ocorra oscilação é que o argumento da raiz quadrada nas duas soluções do ítem (c) seja negativo. Logo,

$$R^2 < \frac{4L}{C}.$$

Neste caso ocorrerá oscilação amortecida com freqüência $\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ e constante de amortecimento $\gamma = \frac{R}{2L}$.

Formulário:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)\right]; \quad i \equiv \sqrt{-1}$$