

PS

Física III

Escola Politécnica - 2006

FGE 2203 - GABARITO DA SUB

6 de julho de 2006

Questão 1

Uma esfera dielétrica de raio a está uniformemente carregada com densidade volumétrica ρ . A esfera está envolvida por uma casca esférica de material condutor, de raios a e $b > a$. A casca condutora está carregada com carga Q . Obtenha:

- (a) (0,5 ponto) As densidades de carga superficiais nas duas superfícies da casca condutora.
- (b) (1,0 ponto) O campo elétrico em todo o espaço.
- (c) (1,0 ponto) O potencial elétrico em todo o espaço, adotando a convenção de potencial nulo no infinito.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

(a) Carga no dielétrico: $Q_d = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$.

Superfície interna: $\sigma = -\frac{Q_d}{4\pi a^2} = -\frac{\rho a}{3}$.

Superfície externa: $\sigma = \frac{Q + Q_d}{4\pi b^2} = \frac{Q}{4\pi b^2} + \frac{\rho a^3}{3b^2}$.

(b) Lei de Gauss para $r < a \implies \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{r}$.

No condutor, na região $a \leq r \leq b$, $\vec{E} = 0$.

Lei de Gauss para $r > b \implies \vec{E} = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$.

(c) $V(r) - \overbrace{V(\infty)}^{=0} = -\int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r}$.

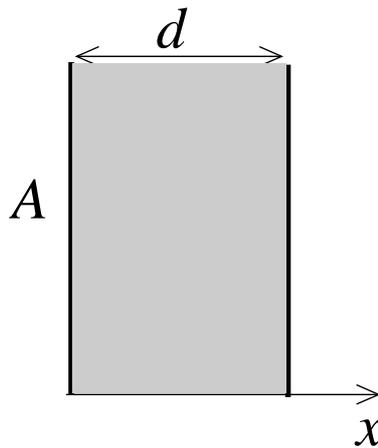
Para $r > b$, $V(r) = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Para $a \leq r \leq b$, $V(r) = V(b) = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 b}$.

Para $r < a$, $V(r) = V(a) - \int_a^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \implies V(r) = \frac{Q + Q_d}{4\pi\epsilon_0 b} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{6\epsilon_0}$.

Questão 2

Um capacitor tem placas planas paralelas de área A , separadas por uma distância d . Entre as placas do capacitor existe um material dielétrico com constante dielétrica κ . Devido a uma compactação não uniforme, a resistividade do material dielétrico varia linearmente com a coordenada x (vide figura), segundo a equação $\rho(x) = ax + b$, com a e b constantes.



- (a) (1,0 pontos) Obtenha a diferença de potencial entre as placas do capacitor, como função da carga em suas placas.
- (b) (1,5 ponto) Calcule a resistência elétrica R entre as placas do capacitor.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

- (a) Em um capacitor de placas planas,

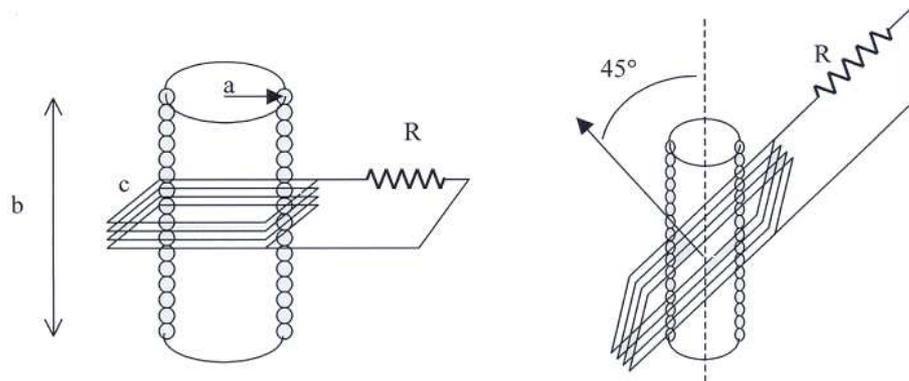
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q_0}{\kappa\epsilon_0 A} \implies \Delta V = Ed = \frac{Q_0 d}{\kappa\epsilon_0 A}$$

- (b) A resistência é dada por:

$$R = \int \frac{\rho}{A} d\ell = \int_0^d \frac{ax + b}{A} dx = \frac{1}{A} \left(a \frac{d^2}{2} + bd \right)$$

Questão 3

Um solenoide longo de raio a , comprimento b e N_1 espiras é envolto por uma bobina quadrada de lado c , com N_2 espiras e resistência desprezível. Os eixos do solenoide e da bobina são coincidentes. O solenoide é alimentado com uma fonte que gera no solenoide uma corrente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$. A bobina é conectada a uma resistência R .



Determine a corrente elétrica na bobina nos casos

- (a) (1,0 ponto) Bobina externa ao solenoide ($c > a$).
- (b) (1,0 ponto) Bobina totalmente interna ao solenoide ($c < a$).
- (c) (0,5 ponto) Bobina externa ao solenoide, mas com seu eixo inclinado de 45° .

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

(a) O campo magnético é nulo no exterior do solenóide e igual a

$$B_{\text{solenóide}} = \frac{N_1 \mu_0 I}{b} = \frac{N_1 \mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{b}$$

no seu interior. Assim, se a **bobina é externa ao solenóide** o fluxo é determinado pela área do solenóide:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{N_1 \mu_0 I_0 \cos(\omega t)}{b} \pi a^2.$$

Pela lei de Faraday, a fem na bobina é

$$V = -N_2 \frac{d\phi_B}{dt} \implies I = \frac{V}{R} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \omega \sin(\omega t) \pi a^2}{bR}.$$

(b) Se a **bobina é interna ao solenóide**, o fluxo de B é determinado pela área da bobina (c^2). Um cálculo análogo ao do item (a) fornece

$$I = \frac{V}{R} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \omega \sin(\omega t) c^2}{bR}.$$

(c) Enquanto a bobina estiver fora do solenóide, o fluxo é determinado pela área do solenóide, qualquer que seja o ângulo.

$$I = \frac{V}{R} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \omega \sin(\omega t) \pi a^2}{bR}$$

Questão 4

Considere o circuito mostrado na figura 1, percorrido pela corrente I . Trata-se de uma semi-circunferência de raio R e dois trechos retilíneos e semi-infinitos.

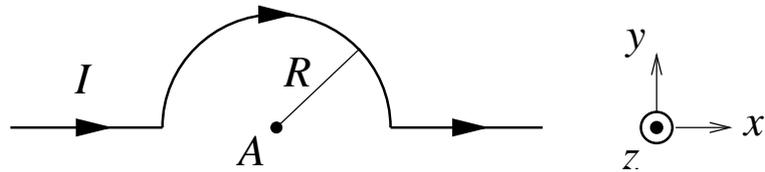


Figura 1:

- (a) (0,5 ponto) Calcule o campo magnético \vec{B} no ponto A indicado na figura 1.
- (b) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético no ponto C , indicado na figura 2 (coordenadas $x = R$, $y = 0$ e $z = 0$). O circuito indicado é constituído de duas semi-circunferências, de raios R , coplanares aos planos xz e xy , e a corrente é I .

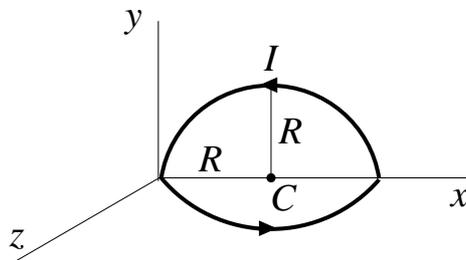


Figura 2:

- (c) (1,0 ponto) Se uma partícula de carga q e velocidade $\vec{v} = -v\hat{x}$ passa pelo ponto C , indicado na figura 2, em $t = 0$, qual é a força de Lorentz nesse instante?

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

(a) Usando a lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2},$$

concluimos que os trechos retilíneos não contribuem porque neles $d\vec{\ell} \parallel \hat{r}$. No semi-círculo,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{R^2} \hat{z} \implies \vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \pi R \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{z}.$$

(b) Usando o resultado do item (a), podemos escrever

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4R} (\hat{y} + \hat{z}).$$

(c) A força de Lorentz é dada por

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(-v\hat{x}) \times \frac{\mu_0 I}{4R} (\hat{y} + \hat{z}) \\ \implies \vec{F} &= \frac{\mu_0 I q v}{4R} (-\hat{z} + \hat{y}). \end{aligned}$$