P1

Física III

Escola Politécnica - 2007

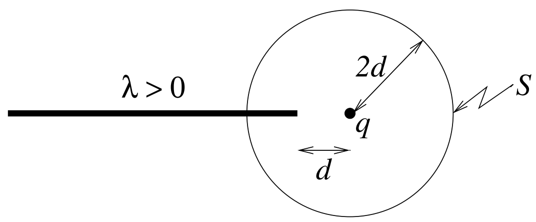
FGE 2203 - GABARITO DA P1

12 de abril de 2007

Questão 1

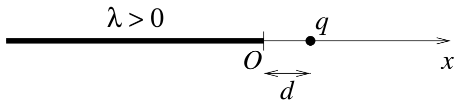
(a) (1,5 ponto) Determine a força (módulo e direção) exercida sobre uma carga $q > 0$, situada a uma distância d da extremidade de um fio semi-infinito carregado com uma densidade linear de carga $\lambda > 0$. A carga está situada no prolongamento do fio.

(b) (1,0 ponto) Considere agora uma superfície esférica S, de raio $2d$, centrada na posição da carga q (veja a figura). Determine o fluxo do vetor campo elétrico sobre a superfície S .



Solução da questão 1

(a) Primeiramente, calculamos o campo produzido pelo fio.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\,\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\lambda dx}{(d-x)^2}\,\vec{\imath} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d}\,\vec{\imath}$$

A força é

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 d}\,\vec{\imath}}$$

(b) A lei de Gauss fornece o fluxo do campo elétrico ϕ_e através de S.

$$\phi_e = \oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{q+\lambda d}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\phi_e = \frac{q+\lambda d}{\epsilon_0}}$$

Questão 2

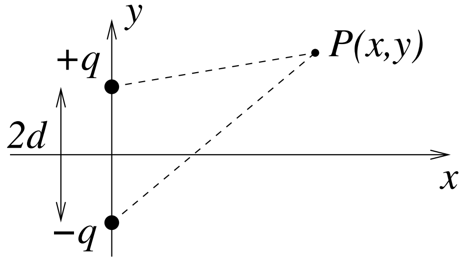
Um dipolo elétrico é formado por duas cargas pontuais, $+q$ e $-q$, situadas respectivamente em $(0, d, 0)$ e $(0, -d, 0)$:

(a) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico em um ponto genérico do plano xy. Expresse o resultado em coordenadas cartesianas.

(b) (0,5 ponto) Qual é o campo elétrico (módulo e direção) num ponto sobre o eixo x?

(c) (0,5 ponto) Qual é o potencial em pontos do plano $y = 0$?

Solução da questão 2



(a) Usando a lei de Coulomb obtemos

$$\boxed{\vec{E}(x,y,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\vec{\imath} + (y-d)\vec{\jmath}}{[x^2+(y-d)^2]^{3/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\vec{\imath} + (y+d)\vec{\jmath}}{[x^2+(y+d)^2]^{3/2}}}$$

(b) Sobre o eixo x, $y = 0$.

$$\vec{E}(x,0,0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\vec{\imath} - d\vec{\jmath}}{[x^2+d^2]^{3/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\vec{\imath} + d\vec{\jmath}}{[x^2+d^2]^{3/2}}$$

$$\boxed{\vec{E}(x,0,0) = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0}\frac{d\vec{\jmath}}{[x^2+d^2]^{3/2}}}$$

(c) O potencial é dado por

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[x^2+(y-d)^2+z^2]^{1/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{[x^2+(y+d)^2+z^2]^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(x,0,z) = 0}$$

Questão 3

(A) (1,0 ponto) Considere um anel de raio R, com uma carga Q uniformemente distribuida, colocado no plano xy, com seu centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Calcule o potencial devido ao anel em um ponto qualquer do eixo z.

(B) Um disco de raio R, no plano xy, com seu centro na origem de um sistema de coordenadas cartesianas, tem densidade superficial de carga $\sigma(r) = Cr^2$, onde r é a distância até o centro do disco e C é uma constante.

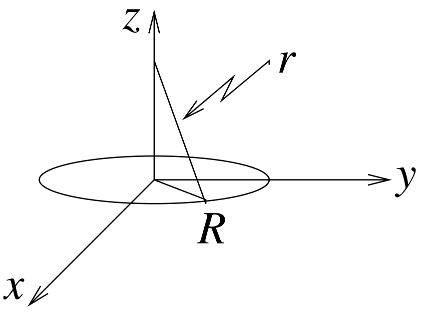
(a) (1,0 ponto) Calcule o potencial devido ao disco no eixo z.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico produzido pelo disco no semi-eixo $z > 0$.

Dado: $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$

Solução da questão 3

(A)

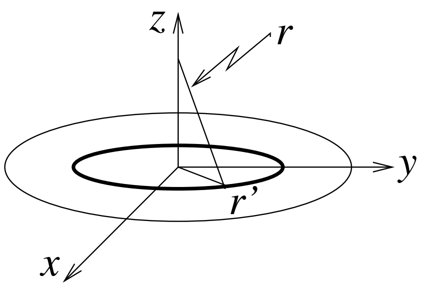


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$$

$$r = \sqrt{z^2+R^2} = \text{cte.}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}}$$

(B)



(a) Consideramos o disco como uma superposição de anéis concêntricos.

$$V_{disco} = \int dV_{anel}$$

$$dV_{anel} = \frac{dq_{anel}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+r'^2}}$$

$$dq_{anel} = \sigma 2\pi r' dr = 2\pi C r'^3 dr$$

$$V_{disco} = \frac{C}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r'^3 dr'}{\sqrt{z^2+r'^2}} = \frac{C}{2\epsilon_0}\left[\frac{(r'^2+z^2)^{3/2}}{3} - z^2\sqrt{r'^2+z^2}\right]_0^R$$

$$\boxed{V_{disco} = \frac{C}{2\epsilon_0}\left[\frac{(R^2+z^2)^{3/2}}{3} - z^2\sqrt{R^2+z^2} + \frac{2}{3}|z|^3\right]}$$

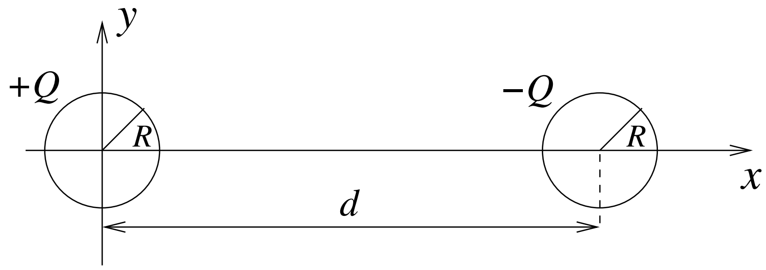
(b) O campo para $z > 0$ é obtido através de

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = \frac{C}{2\epsilon_0}\left[-z\sqrt{R^2+z^2} + 2z\sqrt{R^2+z^2} + z^2\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z^2\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{C}{2\epsilon_0}\left[z\sqrt{R^2+z^2} + \frac{z^3}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z^2\right]\vec{k}}$$

Questão 4

Sejam duas esferas condutoras idênticas, de raios iguais a R, cargas $+Q$ e $-Q$, e separadas por uma distância d. Suponha que $d >> R$, de forma que a distribuição de carga em cada esfera tem simetria esférica (veja a figura).



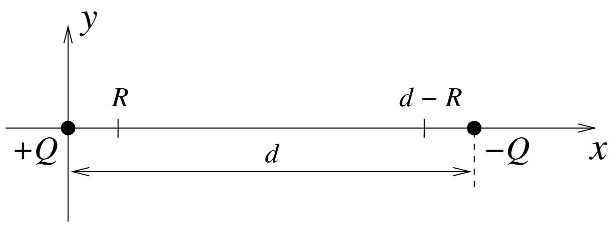
(a) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico no segmento de reta que une os centros das duas esferas.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial entre as duas esferas.

(c) (0,5 ponto) Qual é a capacitância do sistema formado pelas duas esferas?

Solução da questão 4

(a) Devido à simetria esférica, o campo fora das esferas é igual ao de duas cargas puntiformes. Dentro das esferas o campo é nulo.



$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right]\vec{\imath}\,; \qquad R < x < d - R}$$

(b) A ddp V entre as esferas é

$$V = -\int_R^{d-R} E_x dx = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_R^{d-R}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(d-x)}\right]_R^{d-R}$$

$$\boxed{V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{d-2R}{R(d-R)}}$$

(c) A capacitância é dada por

$$\boxed{C = \frac{Q}{|V|} = \frac{2\pi\epsilon_0 R(d-R)}{d-2R}}$$