P2

Física III

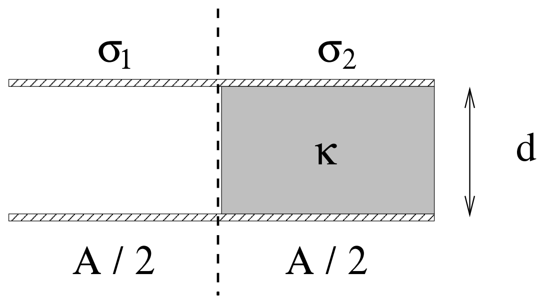
Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA P2

17 de maio de 2007

Questão 1

Um capacitor plano é constituido por duas placas planas paralelas de área A, separadas por uma distância d. Estas placas são mantidas a uma diferença de potencial V. O potencial na placa de cima é maior do que o potencial na placa de baixo. Metade do espaço entre as placas está preenchido por um material dielétrico com constante dielétrica κ, conforme a figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Qual é a capacitância C do sistema?

(b) (1,0 ponto) Quais são as densidades superficiais de carga σ_1 e σ_2 na placa superior do capacitor (1 e 2 designam, respectivamente, o lado esquerdo com vácuo e o lado direito com dielétrico)? Expresse sua resposta em função de ϵ_0, d, κ e V.

(c) (0,5 ponto) Quais são os módulos dos campos elétricos E_1 e E_2 entre as placas do capacitor?

Solução da questão 1

(a) Como as placas do capacitor são equipotenciais,

$$V = E_1\, d = E_2\, d \Longrightarrow E_1 = E_2$$

Em um capacitor plano

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \qquad , \qquad E_2 = \frac{\sigma_2}{\kappa\, \epsilon_0} \qquad ,$$

logo $\boxed{\sigma_2 = \kappa\, \sigma_1}$.

Se Q é o módulo da carga total em cada placa, a capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_1 A/2 + \sigma_2 A/2}{E_1 d} = \frac{\sigma_1 A/2 + \kappa\sigma_1 A/2}{d\, \sigma_1/\epsilon_0}$$

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 A(1+\kappa)}{2d}}.$$

<u>Solução alternativa:</u> Se considerarmos o sistema como dois capacitores planos em paralelo, com áreas iguais a $A/2$, podemos escrever

$$C = C_1 + C_2 = C_1 + \kappa C_1 = (1+\kappa)C_1 = (1+\kappa)\frac{\epsilon_0 A}{2d}\,,$$

que coincide com o resultado anterior.

(b) Usando os resultados do item (a), obtemos

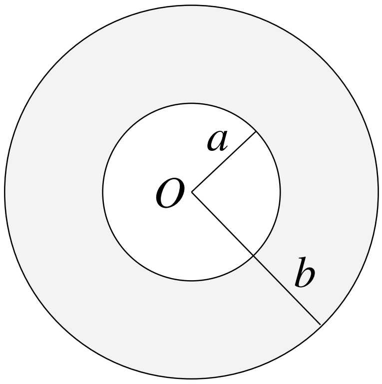
$$\boxed{\sigma_1 = E_1 \epsilon_0 = \frac{V\epsilon_0}{d}} \qquad , \qquad \boxed{\sigma_2 = \kappa\sigma_1 = \frac{\kappa V \epsilon_0}{d}}.$$

(c) Os campos são iguais.

$$\boxed{E_1 = E_2 = \frac{V}{d}}.$$

Questão 2

Uma casca esférica centrada em O, com raios a e b, é formada por um condutor com resistividade $\rho(r)$ que varia com a distância r ao centro O segundo a expressão $\rho(r) = C/r$, onde C é uma constante



(a) (1,5 ponto) Qual é a resistência total da casca esférica na direção radial?

(b) (1,0 ponto) Se uma diferença de potencial V for aplicada entre a superfície interior e a superfície exterior da casca, qual vai ser a densidade de corrente $\vec{J}(r)$? Suponha que o potencial na superfície interna é maior do que o potencial na superfície externa.

Solução da questão 2

(a) Podemos considerar a casca esférica como uma superposição de cascas esféricas concêntricas de raio interno r e raio externo $r+dr$. Como a espessura dr destas cascas é infinitesimal, as suas superfícies interna e externa têm praticamente a mesma área e podemos calcular sua resistência dR através da expressão

$$dR = \frac{\rho(r)}{A(r)} dr \,, \quad \text{onde} \quad A(r) = 4\pi r^2 \,.$$

A resistência total é dada por

$$R = \int_a^b \frac{\rho(r)}{A(r)} dr = \frac{C}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^3} = \frac{C}{8\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{R = \frac{C(b^2 - a^2)}{8\pi\, a^2\, b^2}} \,.$$

(b) A corrente I que flui da superfície interna para a superfície externa é igual a

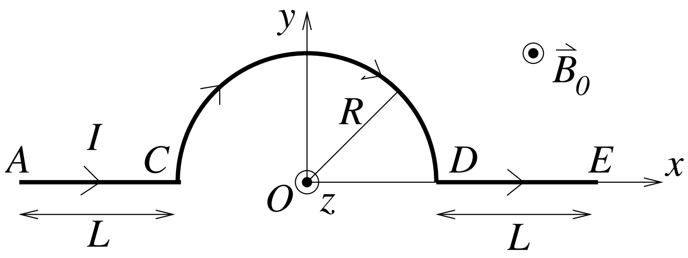
$$I = \frac{V}{R} = \frac{8\,\pi\, a^2\, b^2\, V}{C(b^2 - a^2)} \,.$$

Pela conservação da carga, a corrente que passa por qualquer superfície esférica de raio r, com $a \le r \le b$, é igual a I. Assim, a densidade de corrente, que é radial por simetria, vale

$$\boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\, \hat{r} = \frac{2\, a^2\, b^2\, V}{C(b^2 - a^2) r^2}\, \hat{r}} \,.$$

Questão 3

Na figura vemos um trecho $ACDE$ de um circuito elétrico, formado por dois trechos retilíneos $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ de comprimento L e de uma semi-circunferência $\overset{\frown}{CD}$ de raio R, percorrido por uma corrente I. O circuito, contido no plano xy, está submetido a um campo magnético homogêneo $\vec{B}_0 = B_0\vec{k}$.



(a) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ gerado pelo trecho do circuito no ponto O.

(b) (1,0 ponto) Determine a força resultante $\vec{F}$ produzida pelo campo aplicado $\vec{B}_0$ sobre o trecho do circuito.

Solução da questão 3

(a) O campo é calculado através da lei de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}\,.$$

Os trechos retilíneos $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$ têm $d\vec{\ell} \parallel \hat{r}$ e portanto não contribuem.

No trecho circular $\overset{\frown}{CD}$, $r = R = \text{const.}$ e

$$d\vec{\ell} \perp \hat{r} \Longrightarrow d\vec{\ell} \times \hat{r} = -d\ell\,\vec{k}$$

O campo $\vec{B}$ total é dada por

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_C^D d\ell\,\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\,\vec{k}}$$

(b) A força sobre um elemento infinitesimal do circuito é

$$d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}_0$$

Lembrando que o campo é uniforme,

$$\vec{F}_{\overline{AC}} = \vec{F}_{\overline{DE}} = I(L\,\vec{\imath}) \times (B_0\vec{k}) = -ILB_0\vec{\jmath}.$$

No trecho circular

$$\vec{F}_{\overset{\frown}{CD}} = I\left(\int_C^D d\vec{\ell}\right) \times \vec{B}_0 = I\,(2R\vec{\imath}) \times (B_0\vec{k}) = -I2RB_0\vec{\jmath}.$$

Portanto, a força total é

$$\boxed{\vec{F} = -2I(L+R)B_0\vec{\jmath}}\,.$$

Questão 4

Por um fio condutor retilíneo muito longo, de raio R, passa uma corrente I_0, uniformemente distribuída sobre sua secção reta. O fio está ao longo do eixo z e a corrente flui no sentido positivo do eixo z.

(a) (0,5 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}(r)$ em uma secção reta do fio.

(b) (0,5 ponto) Calcule a corrente $I(r)$ que passa por uma circunferência de raio r, centrada no eixo do fio, em função de r.

(c) (1,5 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o vetor campo magnético $\vec{B}(r)$ para $r \leq R$ e $r > R$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

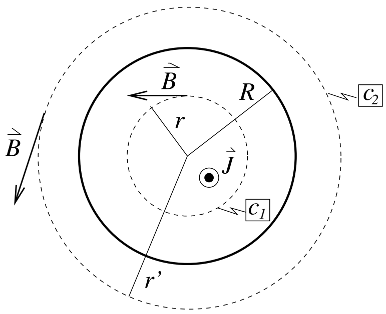
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

Solução da questão 4



(a) Para $r \leq R$ o vetor densidade de corrente $J(r)$ independe de r e aponta no sentido positivo do eixo z.

$$\boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{\pi R^2}\vec{k}}.$$

(b) A corrente através de uma circunferência de raio r é dada por

$$\boxed{I(r) = \begin{cases} J\pi r^2 = \frac{Ir^2}{R^2} \quad \text{para} \quad r \leq R \\ I \quad \text{para} \quad r > R \end{cases}}$$

(c) A lei de Ampère afirma que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Para $r \leq R$, veja a figura acima,

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_1} Bd\ell = B \oint_{C_1} d\ell = B2\pi r = \mu_0 I(r) = \mu_0 \frac{Ir^2}{R^2} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\,\hat{\theta}}$$

Para $r > R$,

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{C_2} Bd\ell = B \oint_{C_2} d\ell = B2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{\theta}}$$