P3

Física III

Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA P3

28 de junho de 2007

Questão 1

Um solenóide ideal de comprimento h e raio R tem um enrolamento com N espiras.

(a) (1,5 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide. Calcule a energia armazenada no solenóide quando pelo fio circula uma corrente I.

(b) (1,0 ponto) Repita os cálculos do item (a) para o caso em que o solenóide está preenchido com um material de suscetibilidade χ_m.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) A auto indutância é dada por $L = \Phi_m/I$, onde o fluxo total

$$\Phi_m = NB_0\pi R^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I}{h} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

A energia magnética é

$$\boxed{U_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h} I^2}$$

(b) Dentro do material, o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(\vec{H} + \overbrace{\vec{M}}^{\chi_m \vec{H}}) = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0$$

Como o campo magnético é multiplicado por um fator $1 + \chi_m$, o fluxo e a auto indutância também serão multiplicados pelo mesmo fator.

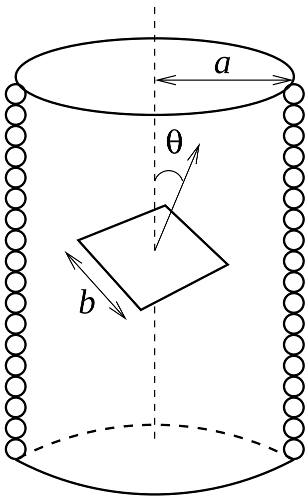
$$\Longrightarrow \boxed{L' = (1+\chi_m)\,\frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

A energia magnética é

$$\boxed{U'_m = \frac{L' I^2}{2} = \frac{(1+\chi_m)}{2}\frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h} I^2}$$

Questão 2

Considere um solenóide muito longo com secção circular de raio a e n espiras por unidade de comprimento. Uma espira quadrada de lados b e resistência R está no interior do solenóide. Os eixos da espira e do solenóide formam entre si um ângulo θ.



(a) (1,0 ponto) Determine a mútua indutância entre o solenóide e a espira quadrada.

(b) (1,0 ponto) Se a corrente no solenóide é dada por $I = I_0 \cos(\omega t)$ determine a corrente i induzida na espira.

(c) (0,5 pontos) Se a espira quadrada é formada não por uma única volta de fio, mas por N voltas de fio, calcule a nova mútua indutância.

Solução da questão 2

(a) O fluxo do campo magnético através da espira quadrada é

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = Bb^2 \cos\theta = \mu_0 n I b^2 \cos\theta,$$

onde I é a corrente no fio do solenóide. Portanto a mútua indutância é

$$\boxed{M = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 n b^2 \cos\theta.}$$

(b) A corrente na espira quadrada é

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{M}{R}\frac{dI}{dt} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\mu_0 n b^2 \cos\theta I_0 \omega \mathrm{sen}(\omega t)}{R}.}$$

(c) O fluxo através da espira quadrada fica multiplicada por N, sendo o novo fluxo $\Phi' = N\Phi$. Portanto,

$$M' = -\frac{d\Phi'}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt} = NM \Rightarrow \boxed{M' = N\mu_0 n b^2 \cos\theta.}$$

Questão 3

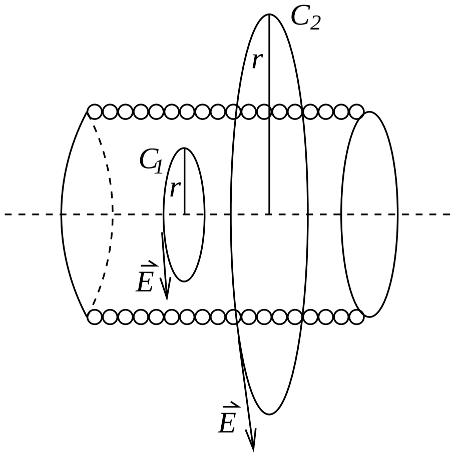
Por um solenóide ideal de raio R, comprimento h e N espiras passa uma corrente $I = I_0 \cos(\omega t)$. A variação temporal de B induz um campo elétrico em todo o espaço.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico induzido dentro do solenóide.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico induzido fora do solenóide.

(c) (0,5 ponto) O campo elétrico induzido é conservativo? Justifique sua resposta.

Solução da questão 3



O campo $\vec{E}$ tem simetria cilíndrica, dentro e fora do solenóide, como mostra a figura.

(a) $\underline{r < R}$: usando a lei de Faraday com o circuito C_1 obtemos

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow E 2\pi r = \frac{\mu_0 N I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t) \pi r^2}{h} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 N I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t) r}{2h} \widehat{\phi}}$$

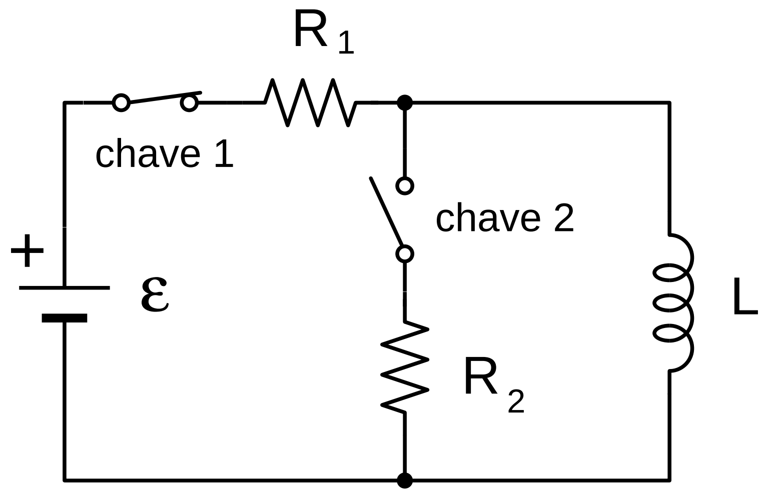
(b) $\underline{r > R}$: usando a lei de Faraday com o circuito C_2 obtemos

$$\oint_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \Rightarrow E 2\pi r = \frac{\mu_0 N I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t) \pi R^2}{h} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\mu_0 N I_0 \omega \operatorname{sen}(\omega t) R^2}{2hr} \widehat{\phi}}$$

(c) O campo $\vec{E}$ **não** é conservativo uma vez que a circulação $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$.

Questão 4

No circuito da figura a chave 2 está aberta e a chave 1 está fechada há muito tempo, encontrando-se o circuito numa situação estacionária.



(a) (1,0 ponto) Determine a corrente I_0 através do indutor.

(b) (1,0 ponto) No instante $t = 0$ a chave 2 é fechada e simultaneamente a chave 1 é aberta. Escreva a equação diferencial e obtenha a corrente $I(t)$ através do indutor para $t \geq 0$.

(c) (0,5 pontos) Mostre que a energia total dissipada no resistor R_2 para $t \geq 0$ é igual à energia que estava armazenada no indutor .

Solução da questão 4

(a) Na situação estacionária não há força contra-eletromotriz no indutor, que se comporta como um simples fio condutor. Portanto a corrente no indutor é

$$\boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1}}$$

(b) A equação diferencial é

$$L\frac{dI}{dt} + R_2 I = 0.$$

Separando-se as variáveis obtemos

$$\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R_2}{L}\int_0^t dt \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{R_2 t}{L} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I = I_0 e^{-R_2 t/L}}.$$

(c) De acordo com a lei de conservação de energia, a energia dissipada deve ser igual à energia inicialmente armazenada no indutor,

$$W = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

De fato, calculando explicitamente a energia dissipada no resistor obtemos

$$E_{dis} = \int_0^{\infty} R_2 I^2 dt = R_2 I_0^2 \int_0^{\infty} e^{-2R_2 t/L} dt = R_2 I_0^2 \left[-\frac{L}{2R_2} e^{-2R_2 t/L} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E}-Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$B = \mu_0 nI, \quad \vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \Phi = LI, \quad \Phi_{21} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu}, \quad \mu = \kappa_m\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0.$$