PR

Física III

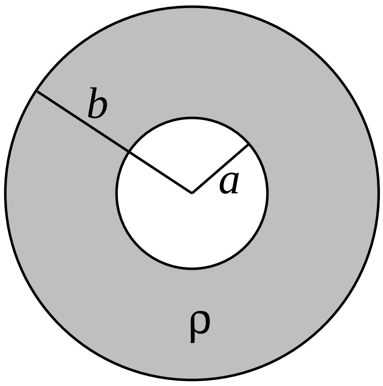
Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA PR

27 de julho de 2007

Questão 1

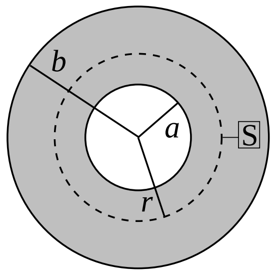
Uma casca esférica isolante de raio interno a e raio externo b tem uma densidade volumétrica de carga igual a ρ, conforme mostra a figura.



(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Gauss, calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em todo o espaço.

(b) (1,0 ponto) A partir do campo elétrico calculado no item (a), calcule o potencial V em todo o espaço. Coloque $V = 0$ no infinito.

Solução da questão 1

(a) 

Região 1 ($0 < r < a$) Por simetria, $\boxed{\vec{E}_1 = \vec{0}\,.}$

Para $r > a$, usando a lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0},$$

e superfícies gaussianas concêntricas com a casca esférica, obtemos

Região 2 ($a < r < b$) $\quad 4\pi r^2 E_2 = \dfrac{1}{\epsilon_0}\dfrac{4\pi(r^3 - a^3)}{3}\rho \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2(r) = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \dfrac{a^3}{r^2}\right)\hat{r}}$

Região 3 ($r > b$) $\quad 4\pi r^2 E_3 = \dfrac{1}{\epsilon_0}\dfrac{4\pi(b^3 - a^3)}{3}\rho \quad \Rightarrow \boxed{\vec{E}_3(r) = \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\dfrac{b^3 - a^3}{r^2}\right)\hat{r}}$

(b) O potencial é dado por

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

com $V_3(\infty) \equiv 0$. Devido à continuidade de V, $V_3(b) = V_2(b)$ e $V_2(a) = V_1(a)$

Região 3 ($r > b$) $\quad V_3(r) - V_3(\infty) = -\displaystyle\int_\infty^r \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{b^3 - a^3}{r^2}dr = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{b^3 - a^3}{r}\bigg|_\infty^r$

$$\Longrightarrow \boxed{V_3(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\frac{b^3 - a^3}{r}}$$

Região 2 ($a < r < b$) $\quad V_2(r) - V_2(b) = -\displaystyle\int_b^r \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)dr = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}\bigg|_b^r - \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0}\frac{1}{r}\bigg|_b^r$

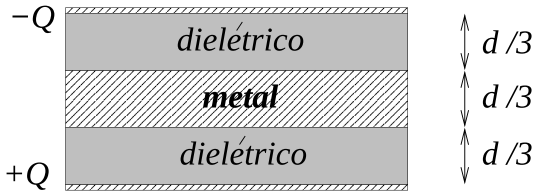
$$\Longrightarrow \boxed{V_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0\, r} + \frac{\rho b^2}{2\epsilon_0}}$$

Região 1 ($0 < r < a$) $\quad$ O potencial é constante

$$\boxed{V_1(r) = V_2(a) = \frac{\rho(b^2 - a^2)}{2\epsilon_0}}$$

Questão 2

Um capacitor plano é constituido por duas placas planas paralelas de área A, com cargas $+Q$ e $-Q$, separadas por uma distância d. O espaço entre as placas está preenchido com um material dielétrico de constante dielétrica κ e por uma chapa metálica de espessura $d/3$ e área A, conforme a figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule o módulo do campo elétrico em todo o espaço.

(b) (1,0 ponto) Qual é a capacitância C do sistema?

(c) (0,5 ponto) Qual é a densidade superficial de carga na placa metálica? Justifique sua resposta.

Solução da questão 2

(a) O campo elétrico é zero fora do capacitor e dentro da chapa metálica. No interior do dielétrico

$$\boxed{E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{Q}{\kappa A \epsilon_0}}$$

(b) A capacitância do sistema é dada por $C = Q/V$. A ddp V entre as placas do capacitor é

$$V = \frac{Ed}{3} + 0 + \frac{Ed}{3} = \frac{2Qd}{3\kappa A \epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{3\kappa\epsilon_0 A}{2d}}$$

(c) Para que o campo dentro da chapa metálica seja zero é necessário cancelar o campo produzido pelas placas do capacitor. Assim, a densidade superficial de carga é igual a $+Q/A$ na parte de cima da chapa e $-Q/A$ na parte debaixo da placa.

Questão 3

Considere uma bobina toroidal de secção quadrada de lados a e raio interno R. A bobina tem N voltas de fio.

(a) (1,5 pontos) Calcule exatamente a auto-indutância L da bobina toroidal levando-se em conta a variação do campo magnético com a distância ao eixo de simetria. *Dado*: O módulo do campo magnético no interior da bobina toroidal é $B = N\mu_0 I/2\pi r$, onde I é a corrente na bobina e r é a distância ao eixo.

(b) (0,5 pontos) Se a corrente no indutor varia com o tempo segundo $I(t) = at^2 - bt$, onde $a, b > 0$ são constantes, determine o instante t em que a força contra-eletromotriz se anula.

(c) (0,5 pontos) Se a bobina toroidal é preenchida com um material de permeabilidade magnética $\mu = 1500\mu_0$, calcule a nova auto-indutância L'.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

(a) O fluxo do campo magnético através da bobina toroidal é

$$\Phi = N \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = N \int_{r=R}^{R+a} \left(\frac{N\mu_0 I}{2\pi r} \right) (adr) = \frac{N^2 \mu_0 I a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

Portanto a auto-indutância é

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N^2 \mu_0 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

(b) A força contra-eletromotriz induzida na bobina é

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} = -L(2at - b).$$

Portanto a força contra-eletromotriz se anula no instante

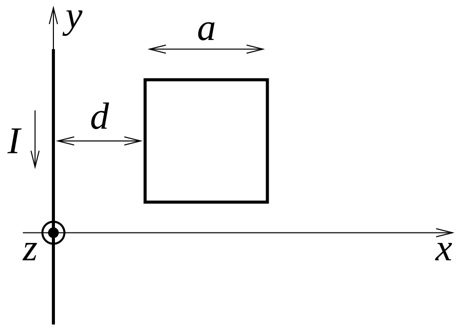
$$t = \frac{b}{2a}.$$

(c) O campo magnético no interior da bobina toroidal aumenta de um fator $\mu/\mu_0 = 1500$, o mesmo acontecendo com o fluxo magnético. Portanto

$$L' = 1500L.$$

Questão 4

Uma espira quadrada condutora de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor como mostra a figura.



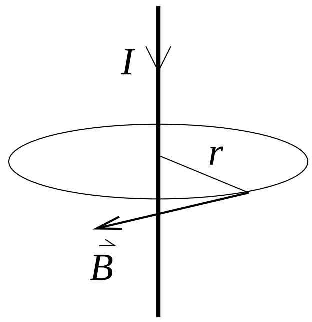
(a) (0,5 ponto) Use a lei de Ampère para calcular o vetor campo magnético produzido pelo fio no plano da espira.

(b) (1,0 ponto) Calcule a mútua indutância do sistema.

(c) (0,5 ponto) Supondo que a espira é puxada para a direita com velocidade v constante, qual é o módulo e o sentido da corrente induzida?

Solução da questão 4

(a)



A lei de Ampère fornece

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\widehat{\phi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{k},} \quad \text{no plano xy.}$$

(b) O fluxo do campo magnético do fio na espira é

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_d^{a+d} \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\, a dx = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log x|_d^{a+d} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

Portanto, a mútua indutância

$$\boxed{M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \log\left(\frac{a+d}{d}\right)}$$

(c) Para compensar o aumento do fluxo de $\vec{B} = B(x)\hat{k}$, que aumenta com x, a corrente induzida I_{ind} deve produzir um campo magnético na direção $-\hat{k}$. Para isto I_{ind} deve fluir no <u>sentido horário</u>.

$$I_{ind} = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{1}{R}\left|\frac{d\Phi_m}{dt}\right|, \quad \text{com} \quad \Phi_m = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log\left(\frac{a+x(t)}{x(t)}\right) \quad \text{e} \quad x(t) = d + vt.$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_{ind} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi R}\left(\frac{v}{x(t)} - \frac{v}{a+x(t)}\right)}$$