PS

Física III

Escola Politécnica - 2007

FGE 2203 - GABARITO DA PS

6 de julho de 2007

Questão 1

Um anel de raio R situado no plano $z = 0$, está carregado com uma carga Q distribuída uniformemente.

(a) (0,5 ponto) Qual é a densidade linear de carga do anel?

(b) (1,0 ponto) Determine o potencial produzido pelo anel sobre o seu eixo, isto é num ponto $(0, 0, z)$.

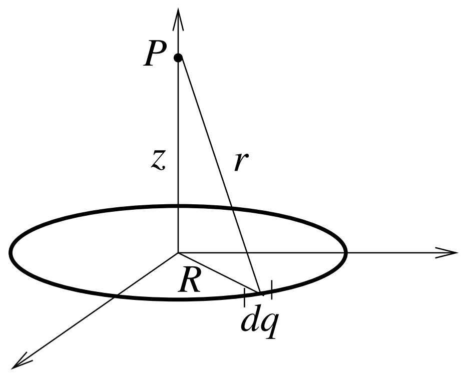
(c) (1,0 ponto) Usando o resultado do item (b), calcule o vetor campo elétrico em $(0, 0, z)$.

Solução da questão 1

(a) A densidade linear de carga é dada por

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{2\pi R}}$$

(b)



A distância r entre todos os elementos de carga dq e o ponto P é constante.

$$\Longrightarrow V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r}$$

$$\boxed{V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+R^2}}}$$

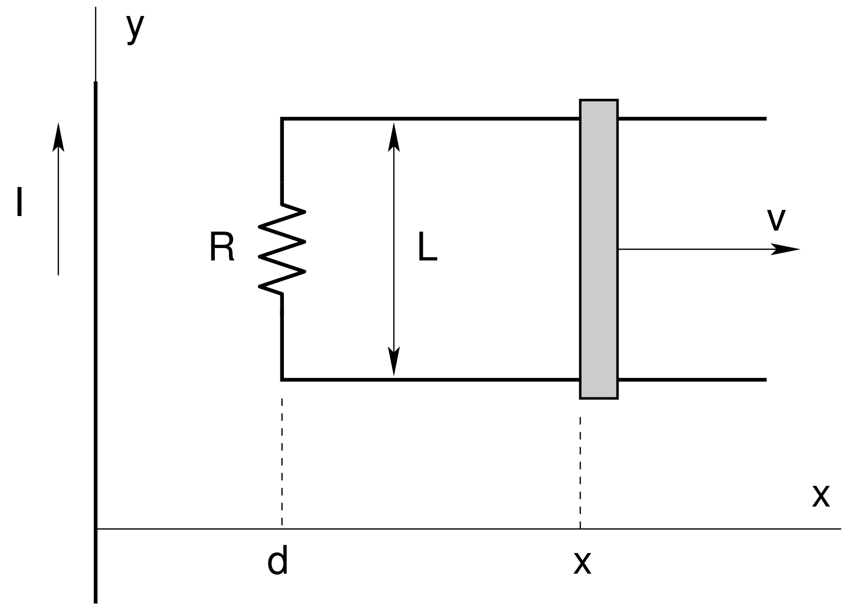
(c) O campo é dado por

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{k}}$$

Questão 2

Uma barra condutora é deslocada com velocidade constante v sobre dois trilhos condutores, afastando-se de um fio infinito transportando uma corrente I. Os trilhos estão ligados por um resistor de resistência R (despreze a resistência da barra e dos trilhos).



(a) (0,5 pontos) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da força eletromotriz induzida. Justifique a sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Determine a corrente elétrica induzida i na barra no instante em que ela se encontra a uma distância x do fio. *Dado*: O módulo do campo magnético produzido pelo fio infinito é $B = \mu_0 I/2\pi r$, onde r é a distância ao fio.

(c) (1,0 ponto) Determine a força $\vec{F}$ que está sendo aplicada sobre a barra para manter sua velocidade constante.

Solução da questão 2

(a) O fluxo do campo magnético aumenta para dentro da página. Segundo a lei de Lenz, a fem induzida será no sentido de produzir um fluxo para fora da página. Portanto a fem induzida é no sentido *anti-horário.*

(b) Orientando a normal à superfície para fora da página, o fluxo magnético através do circuito é

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_{x'=d}^{x} \left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi x'} \widehat{\mathbf{z}} \right) \cdot (L dx' \widehat{\mathbf{z}}) = -\frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \left(\frac{x}{d} \right).$$

A fem induzida é portanto

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \left(\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{\mu_0 I L v}{2\pi x}.$$

A corrente induzida é

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 I L v}{2\pi R x}.}$$

(c) O módulo da força magnética na barra é

$$F_m = iLB = \left(\frac{\mu_0 I L v}{2\pi R x} \right) L \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \right) = \frac{\mu_0^2 I^2 L^2 v}{4\pi^2 R x^2},$$

que deve ser igual ao módulo da força aplicada. Portanto

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0^2 I^2 L^2 v}{4\pi^2 R x^2} \vec{\imath}.}$$

Questão 3

Um solenóide ideal com secção circular de raio R, comprimento h possui N espiras. Pelo enrolamento do solenóide passa uma corrente I constante.

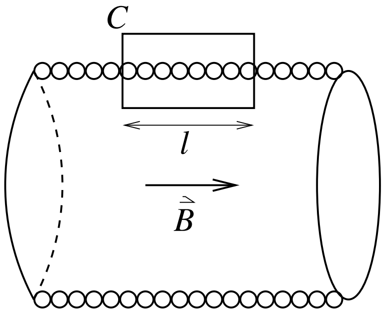
(a) (1,0 ponto) Use a lei de Ampère para calcular o campo magnético B_0 produzido pelo solenóide.

(b) (1,0 ponto) Através expressão da densidade de energia magnética, $u_m = B_0^2/(2\mu_0)$, calcule a energia armazenada no solenóide. Determine também a auto-indutância do solenóide.

(c) (0,5 ponto) Se o solenóide for preenchido com um material com suscetibilidade χ_m qual vai ser sua nova auto-indutância?

Solução da questão 3

(a)



O campo magnético é nulo fora do solenóide e constante em seu interior. Assim, utilizando o caminho C e a lei de Ampère,

$$\oint_C \vec{B}_0 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total},$$

obtemos

$$B_0 l = \mu_0 \frac{N}{h} l I \Longrightarrow \boxed{B_0 = \frac{\mu_0 N I}{h}}$$

(b) Como o campo é constante, a energia magnética é dada por

$$U_m = u_m V = u_m \pi R^2 h = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi R^2 h \Longrightarrow \boxed{U_m = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h} I^2}$$

Porém,

$$U_m = \frac{1}{2} L I^2 \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

(c) Ao se preencher o solenóide com um material de suscetibilidade χ_m, o novo campo

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = (1 + \chi_m) \vec{B}_0,$$

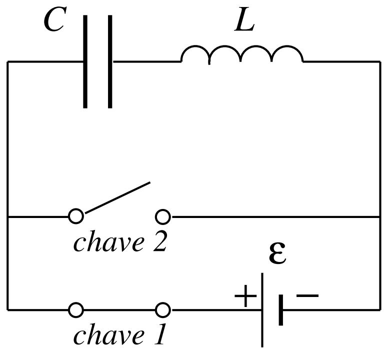
ou seja o campo é multiplicado por um fator $1 + \chi_m$. Isto implica que o fluxo total Φ' no solenóide também vai ser multiplicado pelo mesmo fator e

$$\boxed{L' = \frac{\Phi'}{I} = (1 + \chi_m) L = \frac{(1 + \chi_m) \mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}$$

Para calcular L' através da energia armazenada no solenóide devemos usar $u_m = B^2/(2\mu)$, onde $\mu = (1 + \chi_m)\mu_0$.

Questão 4

No circuito representado na figura abaixo a *chave* 2 está aberta e a *chave* 1 está fechada há bastante tempo. A bateria tem força eletromotriz $\mathcal{E}$ e o indutor tem resistência nula.



(a) (0,5 ponto) Qual é a carga no capacitor? Justifique sua resposta.

(b) (1,5 ponto) No instante $t = 0$ a *chave* 1 é aberta e simultaneamente a *chave* 2 é fechada. Escreva a equação diferencial que descreve o circuito para $t > 0$. Escreva a solução geral desta equação e determine a solução que satisfaz as condições iniciais do problema.

(c) (0,5 ponto) A partir das expressões para a carga e a corrente no circuito mostre que a energia total do sistema se conserva. Qual é o seu valor? Expresse seus resultados em termos de $\mathcal{E}$, C e L.

Solução da questão 4

(a) Após um tempo longo o capacitor se carrega e a corrente no circuito é nula. O indutor ideal se comporta como um pedaço de fio de resistência nula e portanto a ddp no capacitor é igual a $\mathcal{E}$.

$$\Longrightarrow \boxed{Q_0 = C\mathcal{E}}$$

(b) Fechando a *chave* 2 e abrindo a 1 o capacitor se descarrega e $I = -dQ/dt$, onde Q é a carga no capacitor. A equação do circuito LC é

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} \Longrightarrow \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC} \equiv -\omega_0^2 Q}$$

A solução geral desta equação depende de duas constantes arbitrárias A e ϕ.

$$Q(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)\ , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = A\omega_0 \mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

As condições iniciais fornecem

$$\left.\begin{array}{l} Q(0) = Q_0 = A\cos(\phi) \\ I(0) = 0 = A\omega_0\mathrm{sen}(\phi) \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi = 0, \quad A = Q_0 = C\mathcal{E}$$

$$\boxed{Q(t) = C\mathcal{E}\cos(\omega_0 t) \quad \text{e} \quad I(t) = C\mathcal{E}\omega_0\mathrm{sen}(\omega_0 t)}$$

(c) A energia total

$$E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}LC^2\mathcal{E}^2\underbrace{\omega_0^2}_{1/LC}\mathrm{sen}^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}C\mathcal{E}^2}$$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p=qd,\quad \vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E},\quad U=-\vec{p}\cdot\vec{E},\quad \Phi_E=\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i},\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad C=Q/V,\quad C_{eq}=C_1+C_2+\dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots,\quad U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{CV^2}{2}=\frac{QV}{2},\quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0}=\kappa,\quad u=\frac{\epsilon_0}{2}E^2,\quad E=\frac{E_0}{\kappa},$$

$$E=\frac{\sigma}{\epsilon},\quad u=\frac{\epsilon}{2}E^2,\quad \oint\epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{int-liv},\quad I=\frac{dQ}{dt}=n|q|v_dA,\quad \vec{J}=n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T)=\rho_0[1+\alpha(T-T_0)],\quad dR=\rho\frac{d\ell}{A},\quad V=RI,\quad V=\mathcal{E}-Ir,\quad P=VI=I^2R=\frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B},\quad \Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},$$

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B},\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \frac{F}{\ell}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0=\mu_0\vec{H},\quad \vec{B}_m=\mu_0\vec{M},\quad \vec{M}=\chi_m\vec{H},\quad \mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad \Phi^{total}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=M_{21}I_1,\quad u=\frac{B^2}{2\mu_0},\quad U=\frac{LI^2}{2},$$

$$u=\frac{B^2}{2\mu},\quad \mu=\kappa_m\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0.$$