P1

Física III

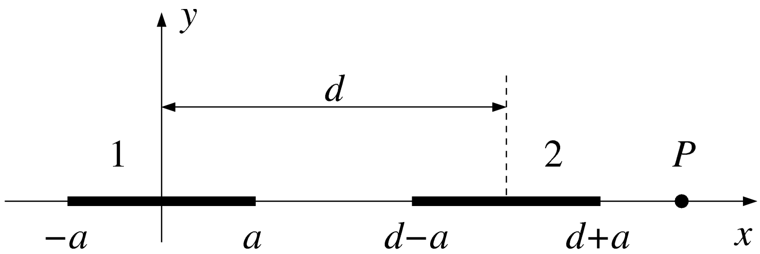
Escola Politécnica - 2008

FGE 2203 - GABARITO DA P1

10 de abril de 2008

Questão 1

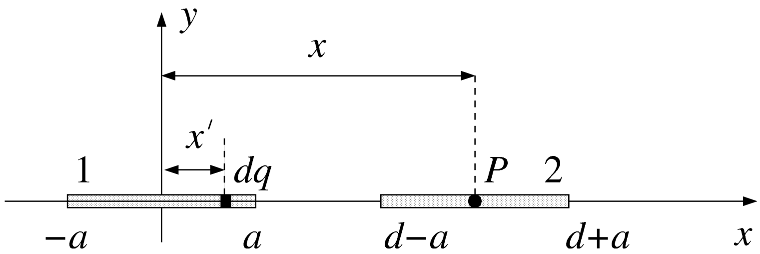
Dois bastões finos 1 e 2, idênticos, de comprimento $2a$, têm densidade linear de carga λ constante. Os bastões estão sobre o eixo x, separados por uma distância $d > 2a$, conforme mostra a figura.



(a) (1,5 ponto) Calcule o campo elétrico produzido pelo bastão 1 sobre um ponto P do eixo x com abscissa $x > a$.

(b) (1.0 ponto) Calcule a força que o bastão 1 exerce sobre o bastão 2.

Solução da questão 1



(a) O campo produzido pela carga dq do bastão 1 no ponto P é

$$dE = dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x-x')^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx'}{(x-x')^2}$$

O campo total em P é

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{dx'}{(x-x')^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x-x')}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right]\vec{\imath}}$$

(b) O força sobre o elemento de carga dq_2 com abscissa x do bastão 2 é igual a

$$dF = Edq_2 = E\lambda dx$$

A força total sobre o bastão 2 é

$$F = \int_{d-a}^{d+a} E\lambda dx = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\int_{d-a}^{d+a} dx\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right] = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\Bigg|_{d-a}^{d+a}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{d^2}{d^2-4a^2}\right)\vec{\imath}}$$

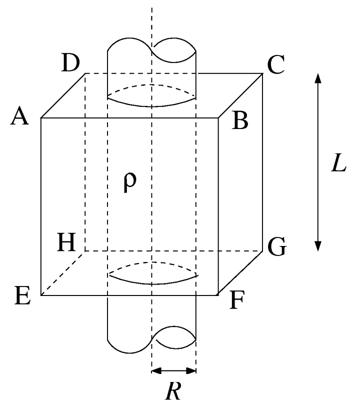
Questão 2

Um cilindro isolante, infinito, com raio R tem uma densidade volumétrica de carga uniforme igual a ρ.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico dentro do cilindro.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico fora do cilindro.

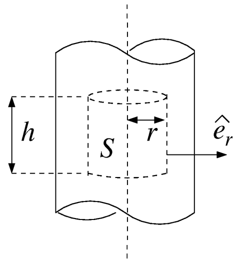
(c) (1,0 ponto) Considere um cubo de lado $L > R$ com centro no eixo do cilindro e com as faces ABCD e EFGH perpendiculares ao eixo do cilindro, conforme a figura ao lado. Qual é fluxo do campo elétrico através de toda a superfície do cubo? Qual é o fluxo através da face ABCD? Qual é o fluxo através da face ABFE?



Solução da questão 2

(a) Dentro do cilindro tomamos como superfície gaussiana um cilindro de raio $r < R$, altura h e coaxial com o cilindro infinito.

Lei de Gauss

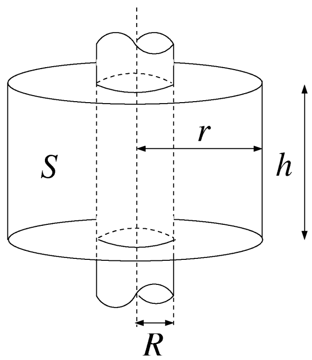


$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$\vec{E}$ tem simetria cilíndrica: $\vec{E} = E(r)\hat{e}_r$.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{sup. lateral}} E(r)dA = E(r)2\pi rh = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 h}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{e}_r}$$

(b) Fora do cilindro tomamos também uma superfície gaussiana cilídrica



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{sup. lateral}} E(r)dA = E(r)2\pi rh$$

$$= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\pi R^2 h}{\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{r}\hat{e}_r}$$

(c) Pela lei de Gauss, o fluxo total através do cubo é

$$\Phi_{total} = \oint_{cubo} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\pi R^2 L\rho}{\epsilon_0}$$

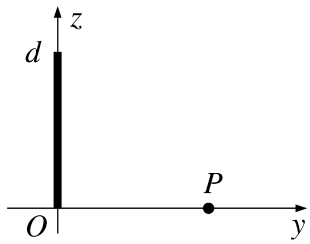
Na face ABCD, $\vec{n} \perp \vec{E} \Rightarrow \Phi_{\text{ABCD}} = 0$.

Na face ABFE

$$\Phi_{\text{ABEF}} = \frac{1}{4}\Phi_{total} = \frac{\pi R^2 L\rho}{4\epsilon_0}$$

Questão 3

Um fio de comprimento d, carregado com densidade linear de carga variável $\lambda(z) = \lambda_0 z$, está situado sobre o eixo z, como mostra a figura.



Determine:

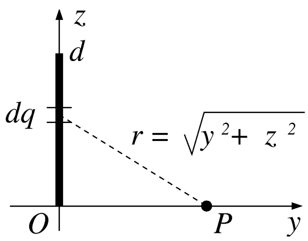
(a) (1,0 ponto) o potencial elétrico no ponto P sobre o eixo y;

(b) (0,5 ponto) a componente E_y do campo elétrico num ponto P sobre o eixo y com coordenada $y > 0$;

(c) (1,0 ponto) o trabalho para levar uma carga q da posição $y = d$ até a posição $y = 2d$.

Solução da questão 3

(a) O potencial dV no ponto P devido ao elemento de carga $dq = \lambda(z)dz = \lambda_0 z dz$ é



$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda_0 z dz}{4\pi\epsilon_0\sqrt{y^2+z^2}}$$

O potencial devido a todo o bastão é

$$V = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^d \frac{zdz}{\sqrt{y^2+z^2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{y^2+z^2}\Bigg|_0^d \Longrightarrow \boxed{V = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{y^2+d^2} - |y|\right)}$$

(b) A componente y do campo elétrico é dada por

$$\boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}} - 1\right)}$$

(c) O trabalho para levar a carga de $y = d$ até $y = 2d$ é igual à variação de energia potencial da carga.

$$W_{d\to 2d} = q(V(2d) - V(d)) = \frac{q\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{4d^2+d^2} - 2d - \sqrt{d^2+d^2} + d\right)$$

$$\boxed{W_{d\to 2d} = \frac{q\lambda_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1\right)}$$

Questão 4

Considere um capacitor de placas paralelas de área A separadas por uma distância d.

(a) (1,0 ponto) Entre as placas do capacitor há um campo elétrico $E = \sigma/\epsilon_0$, onde σ é a densidade superficial de carga nas placas. A partir de E, calcule a diferença de potencial entre as placas e deduza a expressão da capacitância para o capacitor de placas paralelas. Dê sua resposta em termos de ϵ_0, d e A.

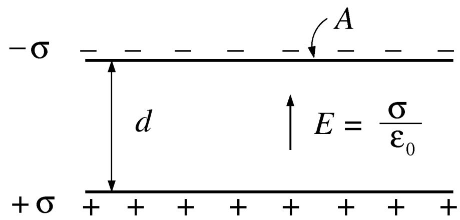
Este capacitor é carregado com um bateria até que a diferença de potencial entre as placas seja igual a V. Em seguida, a bateria é desconectada e as placas do capacitor são separadas até uma distância $2d$.

(b) (0,5 ponto) Calcule a razão V'/V, onde V' é a diferença de potencial entre as placas após elas serem afastadas.

(c) (1,0 ponto) Calcule o trabalho gasto para separar as placas.

Solução da questão 4

(a) Como o campo é constante entre as placas a diferença de potencial V é dada por



$$V = Ed = \sigma d/\epsilon_0$$

A capacitância por definição é igual a

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\sigma d/\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

(b) Quando afastamos as placas, as cargas nas placas não mudam. Portanto, o campo elétrico $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/(A\,\epsilon_0)$ também não muda.

$$\Longrightarrow V' = E'2d = E2d = \frac{V}{d}2d \Longrightarrow \boxed{\frac{V'}{V} = 2}$$

(c) O trabalho realizado para afastar as placas é igual à variação de energia do capacitor.

$$W = E_f - E_i = \frac{1}{2}C'V'^2 - \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{2d}(2V)^2 - \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}V^2 \Longrightarrow \boxed{W = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2d}}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k},$$

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$

Algumas integrais

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) \quad ; \quad \int\frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a}\frac{1}{ax+b} \quad ; \quad \int\frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{\sqrt{ax^2+b}}{a}$$