P2

Física III

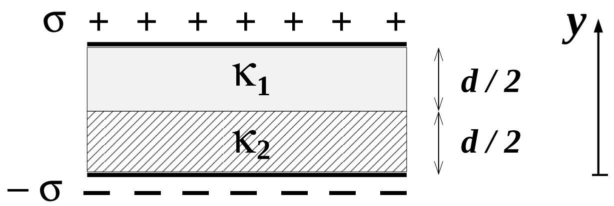
Escola Politécnica - 2008

FGE 2203 - GABARITO DA P2

15 de maio de 2008

Questão 1

Um capacitor com placas paralelas de área A, é preenchido com dielétricos com constantes dielétricas κ_1 e κ_2, conforme mostra a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule os campos elétricos $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ em cada um dos dielétricos e a diferença de potencial entre as placas.

(b) (1,0 ponto) Calcular a capacitância.

(c) (0,5 ponto) Calcule a densidade superficial de carga na superfície do dielétrico 1 (expresse sua resposta em função de σ e κ_1).

Solução da questão 1

(a) Na presença de um dielétrico com constante dielétrica κ o campo elétrico fica reduzido de um fator κ. Assim,

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_1} = -\frac{\sigma}{\kappa_1 \epsilon_0}\vec{\jmath} \quad \text{(dielétrico 1)}\ , \qquad \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_2} = -\frac{\sigma}{\kappa_2 \epsilon_0}\vec{\jmath} \quad \text{(dielétrico 2)}.$$

A diferença de potencial é dada por

$$V = -\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_1\frac{d}{2} + E_2\frac{d}{2} = \left(\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}\right)\frac{\sigma d}{2\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{V = \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1\,\kappa_2}\right)\frac{\sigma d}{2\epsilon_0}.}$$

(b) A capacitância é dada por

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{V} = \left(\frac{\kappa_1\,\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\right)\frac{\epsilon_0 A}{d/2}.}$$

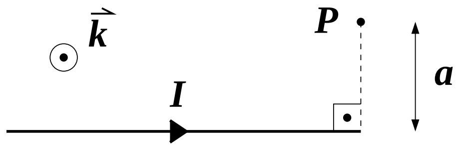
(c) Chamando σ_i a densidade de carga induzida na superfície do dielétrico 1 e E_i o campo produzido por esta densidade temos:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{E_0}{\kappa_1} = \frac{\sigma}{\kappa_1 \epsilon_0} \\ E_1 &= E_0 - E_i = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sigma_i = \left(\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1}\right)\sigma.}$$

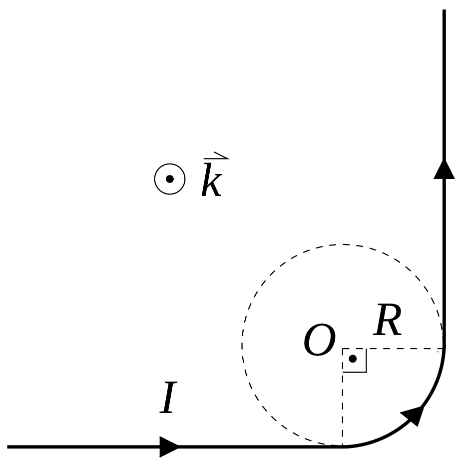
Questão 2

Usando a lei de Biot-Savart,

(a) (1,0 ponto) calcule o vetor campo mangnético $\vec{B}$ produzido por um fio semi-infinito por onde passa uma corrente I no ponto P mostrado na figura ($\vec{k}$ é o versor que aponta na direção positiva do eixo z);

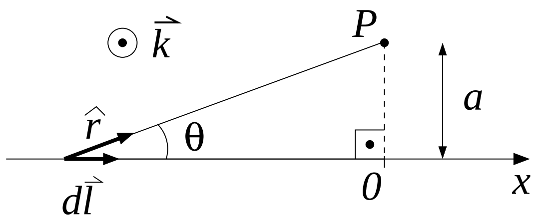


(b) (1,5 ponto) calcule o vetor campo magnético $\vec{B}$ produzido pelos fios semi-infinitos e pelo trecho curvo do condutor (um quarto de círculo) no ponto O (centro do círculo de raio R mostrado na figura).



Solução da questão 2

(a)



Usando a lei de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0\, I\, dx\,\text{sen}\,\theta}{4\pi r^2}\vec{k} \qquad (1)$$

Primeira solução: variáveis na equação (1) em função de θ

$$r = \frac{a}{\text{sen}\theta}\ , \quad x = -a\,\text{cotag}\,\theta\ , \quad dx = a\,\text{cosec}^2\theta\, d\theta \Longrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi a}\,\text{sen}\theta\,\vec{k}$$

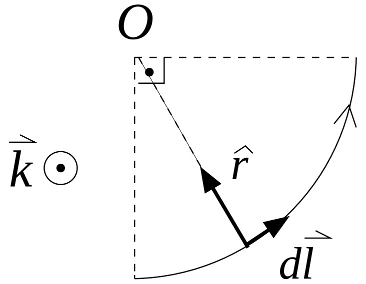
$$\Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi a}\int_0^{\pi/2}\text{sen}\theta\, d\theta\,\vec{k} = -\frac{\mu_0\, I}{4\pi a}\,\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\ \vec{k} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi a}\,\vec{k}$$

Segunda solução: usando a variável x na equação (1)

$$r = \sqrt{a^2+x^2}\ , \quad \text{sen}\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \Longrightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, a}{4\pi}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, a}{4\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\,\vec{k} = \frac{\mu_0\, I\, a}{4\pi}\ \frac{x}{a^2\,(a^2+x^2)^{1/2}}\Bigg|_{-\infty}^{0}\ \vec{k}, \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi a}\,\vec{k}.}$$

(b)



No trecho circular $d\vec{l}\perp\hat{r} \Rightarrow d\vec{l}\times\hat{r} = dl\,\vec{k}$ e a lei de Biot-Savart fornece

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0\, I\, dl}{4\pi R^2}\vec{k} \qquad (2)$$

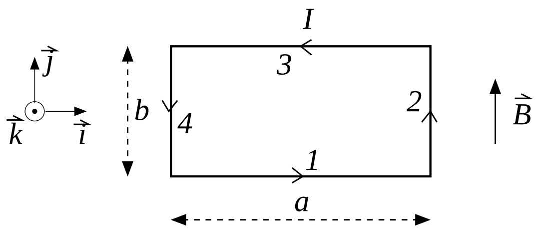
$$\Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi R^2}\int dl\,\vec{k} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi R^2}\,\frac{\pi R}{2}\,\vec{k} = \frac{\mu_0\, I}{8R}\,\vec{k}$$

A contribuição dos fios semi-infinitos é obtida da expressão do item (a) colocando $a = R$. O campo dos dois fios se soma e o resultado final é

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{8R}\,\vec{k} + 2\,\frac{\mu_0\, I}{4\pi R}\,\vec{k} = \frac{\mu_0\, I}{8\pi R}(4+\pi)\,\vec{k}.}$$

Questão 3

Em uma bobina retangular com lados de comprimento a e b e com N espiras, passa uma corrente I. A bobina é submetida a um campo magnético constante B. O plano da bobina é paralelo à direção do campo, conforme mostra a figura abaixo.



(a) (1,0 ponto) Calcule as forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$, que agem sobre os lados $1, 2, 3$ e 4 da bobina.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor momento magnético da bobina.

(c) (1,0 ponto) Sabendo-se que o módulo do torque sobre a bobina é igual a τ_0, determine a corrente que circula na bobina (dê sua resposta em função de a, b, N, B e τ_0).

Solução da questão 3

(a) Sobre um fio percorrido por uma corrente I em um campo magnético $\vec{B}$ age uma força

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B} = I\,\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{(para } \vec{B} \text{ constante)}$$

Somente os lados 1 e 3, perpendiculares ao campo magnético, sofrem força devido ao campo magnético.

$$\boxed{\vec{F}_2 = \vec{F}_4 = \vec{0}} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{F}_1 = -\vec{F}_3 = NIaB\vec{k}}$$

(b) O momento magnético $\vec{\mu}$ da espira é

$$\boxed{\vec{\mu} = NI\vec{A} = NIab\vec{k}.}$$

(c) O torque que aje sobre a espira é

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = NIabB\vec{k} \times \vec{\jmath} = -NIabB\vec{\imath},$$

ou, alternativamente, calculando o torque das forças em relação ao centro da espira (como $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ formam um binário podemos calcular o torque em relação a qualquer ponto) obtemos:

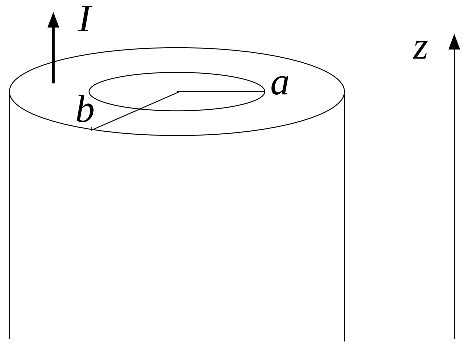
$$\vec{\tau} = -\left(\frac{b}{2}F_1 + \frac{b}{2}F_3\right)\vec{\imath} = -NIabB\vec{\imath}$$

Se o módulo do torque é τ_0, obtemos para a corrente

$$\boxed{I = \frac{\tau_0}{NabB}.}$$

Questão 4

Por um cilindro reto, oco, muito longo de raio interno a e raio externo b, passa uma corrente I, uniformemente distribuida sobre sua seção reta.



(a) (0.5 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}$.

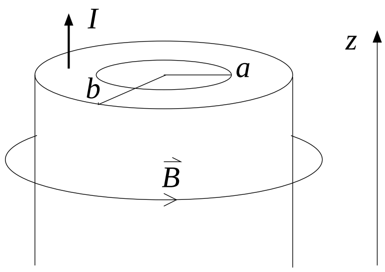
(b) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético B nas regiões $r < a$ e $r > b$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético B na região $a < r < b$.

Solução da questão 4

(a) A densidade de corrente é dada por

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}\,\vec{k} \quad \text{para } a < r < b$$



Como o cilindro é muito longo, as linhas de $\vec{B}$ são circulares. Além disto, elas têm o sentido indicado na figura. Usamos como curvas amperianas círculos centrados no eixo do cilindro.

(b) Para $r > b$,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 I \Longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Para $r < a$,

$$B 2\pi r = 0 \Longrightarrow \boxed{B = 0}$$

(c) Para $a < r < b$,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 J \pi (r^2 - a^2) = \mu_0 I \frac{(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)}\,\frac{r^2 - a^2}{r}}$$

Formulário

$$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0 \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

Algumas integrais

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \log(x + \sqrt{c+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \sqrt{c+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad \int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\log(a^2+x^2).$$