P3

Física III

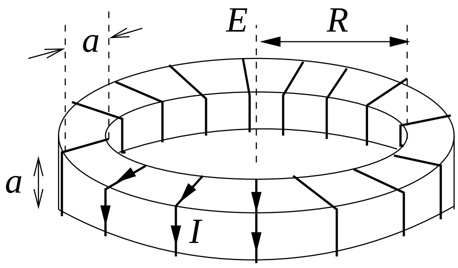
Escola Politécnica - 2008

FGE 2203 - GABARITO DA P3

3 de julho de 2008

Questão 1

Na figura vemos uma bobina toroidal de seção reta quadrada de lado a e raio interno R. Ela possui um enrolamento com N espiras arranjadas de forma compacta e uniforme. A corrente que passa pelo enrolamento da bobina é I.



(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o campo $\vec{B}_0(r)$ no interior da bobina, onde r é a distância a partir do eixo central de simetria da bobina (E).

(b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo $\vec{B}_0(r)$ através de uma espira e a auto-indutância L da bobina.

(c) (0,5 ponto) Se a bobina estivesse preenchida com um material magnético de susceptibilidade χ_m, qual seria o valor do campo magnético dentro da bobina?

Solução da questão 1

(a) Devido à simetria toroidal, as linhas do campo $\vec{B_0}$ serão círculos concêntricos ao eixo da bobina toroidal, $\vec{B_0} = B_0\widehat{\phi}$. Aplicando a lei de Ampère e usando como caminho um círculo de raio r, concêntrico ao eixo do toróide, obtemos

$$\oint \vec{B_0} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}} \quad \Longrightarrow \quad B_0(2\pi r) = \mu_0 N I \quad \Longrightarrow \quad B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B_0} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}\widehat{\phi}}$$

(b) O fluxo magnético ϕ_1 através de uma espira da bobina é

$$\phi_1 = \int \vec{B_0} \cdot d\vec{A} = \int_R^{R+a} B_0(r)(a dr) = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

O fluxo magnético total é

$$\Phi_m = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

A auto-indutância é dada por

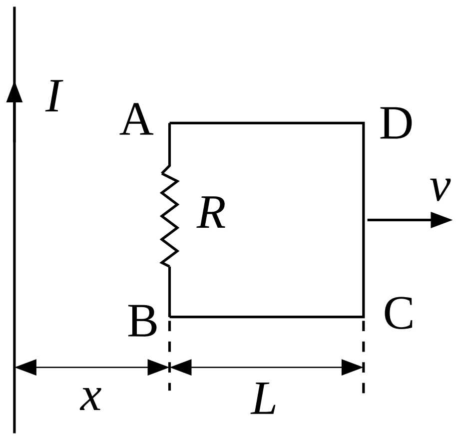
$$L = \frac{\Phi_m}{I} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)}$$

(c) O campo magnético é

$$\vec{B} = (1+\chi_m)\vec{B_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\frac{NI}{2\pi r}\widehat{\phi}}$$

Questão 2

Um fio retilíneo muito longo conduz uma corrente I. Uma espira quadrada de lado L, com resistência R, move-se com velocidade v constante, conforme é indicado na figura. No instante $t = 0$ a distância x entre o lado AB da espira e o fio é igual a L ($x(0) = L$).



(a) (0,5 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético produzido pelo fio.

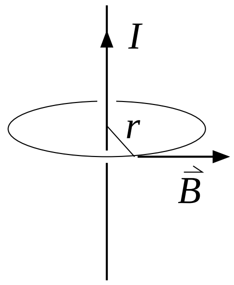
(b) (1,0 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético na espira em função de t.

(c) (0,5 ponto) Determine a intensidade e o sentido (horário ou anti-horário) da corrente induzida na espira.

(d) (0,5 ponto) Calcule a indutância mútua M entre o fio e a espira.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a)



Lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 I \Longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

(b) O fluxo de B é dado por

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_x^{x+L} BLdx' = \int_x^{x+L} \frac{\mu_0 I}{2\pi x'} Ldx' = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln\left(\frac{x+L}{x}\right)$$

A coordenada x do lado AB da espira em função do tempo é $x(t) = L + vt$. Substituindo na equação acima obtemos

$$\boxed{\Phi_B = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln\left(\frac{vt+2L}{vt+L}\right)}$$

(c) A força eletromotriz induzida na espira é

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\left(\frac{d}{dt}\ln(vt+2L) - \frac{d}{dt}\ln(vt+L)\right) = -\frac{\mu_0 IL}{2\pi}\left(\frac{v}{vt+2L} - \frac{v}{vt+L}\right)$$

$$\epsilon = \frac{\mu_0 IL^2 v}{2\pi(vt+L)(vt+2L)} \Longrightarrow \boxed{I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{\mu_0 IL^2 v}{2\pi R(vt+L)(vt+2L)}}$$

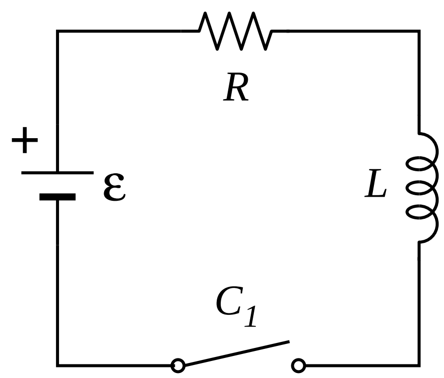
A corrente induzida na espira gera um campo na mesma direção do campo gerado pelo fio para se opor à diminuição do fluxo de $\vec{B}$ através da espira. O <u>sentido da corrente é horário</u>.

(d) A indutância mútua entre a espira e o fio é

$$\boxed{M = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \ln\left(\frac{vt+2L}{vt+L}\right)}$$

Questão 3

Um circuito elétrico é formado por um resistor de resistência R, uma bobina com indutância L, uma bateria com fem ε e uma chave C_1. No instante $t = 0$ a chave C_1 é ligada.



(a) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para a corrente $I(t)$ no circuito.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente $I(t)$ no circuito.

(c) (0,5 ponto) Escreva as seguintes potências em função de $I(t)$ e de suas derivadas: $P_b(t)$ fornecida pela bateria, $P_R(t)$ dissipada no resistor e $P_L(t)$ que fornece a variação de energia no indutor.

Solução da questão 3

(a) A soma das ddps nos vários elementos se anula quando percorremos o circuito e voltamos ao ponto de partida.

$$\varepsilon - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{L\frac{dI}{dt} = -RI + \varepsilon}$$

(b) É conveniente colocar R em evidência

$$L\frac{dI}{dt} = -R(I - \frac{\varepsilon}{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}(I - \frac{\varepsilon}{R})$$

e definir $x \equiv I - \varepsilon/R$. Lembrando que a derivada da constante ε/R é zero, podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{R}{L}x \Longrightarrow x(t) = Ae^{-tR/L} \Longrightarrow I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + Ae^{-tR/L}$$

Em $t = 0$, $I = 0$. Assim, $A = -\varepsilon/R$ e

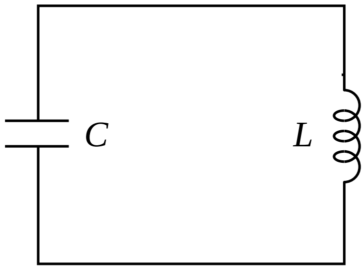
$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-tR/L})}$$

(c) As potências são dadas pelas expressões

$$\boxed{P_b(t) = \varepsilon I; \qquad P_R(t) = RI^2; \qquad P_L(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = LI\left(\frac{dI}{dt}\right)}$$

Questão 4

Na figura abaixo vemos um circuito elétrico formado por um capacitor de capacitância C e uma bobina com indutância L. No instante $t = 0$ o capacitor tem carga máxima Q_m e a corrente no circuito é zero.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga $Q(t)$ no capacitor.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente I(t) no circuito.

(c) (1,0 ponto) Mostre que a energia se conserva.

Solução da questão 4

(a) Quando o capacitor começa a descarregar $dI/dt > 0$ e $I = -dQ/dt$. A ddp na bobina é igual à do capacitor,

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C} \Longrightarrow \boxed{L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}}$$

(b) A solução da equação acima é

$$Q(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \quad \text{onde} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \omega_0 A\text{sen}(\omega_0 t + \phi),$$

As condições iniciais $I(0) = 0$ e $Q(0) = Q_m \Rightarrow \phi = 0$ e $A = Q_m$. Assim,

$$Q(t) = Q_m\cos(\omega_0 t), \qquad \boxed{I(t) = \omega_0 Q_m \text{sen}(\omega_0 t)},$$

(c) A energia no circuito é

$$E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2C}Q_m^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{L}{2}Q_m^2\omega_0^2\text{sen}^2(\omega_0 t) = \frac{Q_m^2}{2C},$$

onde usamos $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$. A expressão obtida independe do tempo, portanto a energia se conserva.

Formulário

$$C = Q/V, , \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0 \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E}-Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1+\chi_m)\mu_0 \equiv K_m \mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$