PR

Física III

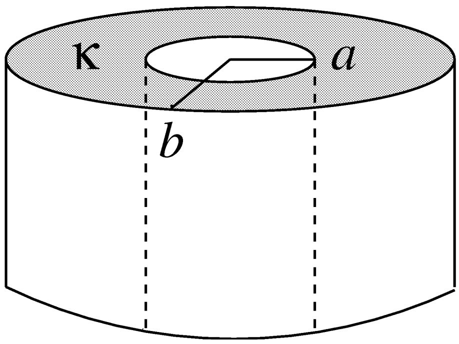
Escola Politécnica - 2008

FGE 2203 - GABARITO DA PR

31 de julho de 2008

Questão 1

Um cilindro condutor longo de raio a e densidade linear de carga $+\lambda$ está circundado por uma casca cilíndrica coaxial condutora de raio b e densidade linear de carga $-\lambda$. O espaço entre eles está preenchido por um isolante com constante dielétrica κ, conforme mostra a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico em todo o espaço.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial entre o cilindro condutor de raio a e a casca cilíndrica condutora de raio b.

(c) (0,5 ponto) Determine a capacitância por unidade de comprimento do sistema.

Solução da questão 1

(a) Dentro do condutor o campo é zero.

$$\boxed{\vec{E} = \vec{0} \quad \text{para} \quad 0 < r < a}$$

Na região que contém o dielétrico usamos o teorema de Gauss e tomamos como superfície gaussiana S um cilindro de raio r e altura h, coaxial com o cilindro de raio a e a casca cilíndrica. Se não houvesse o dielétrico,

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_0 2\pi r h = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,\widehat{r}$$

Devido ao dielétrico o campo elétrico fica reduzido por um fator κ:

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\kappa r}\,\widehat{r} \quad \text{para} \quad a < r < b}$$

Na região $r > b$ a lei de Gauss e argumentos de simetria fornecem

$$\boxed{\vec{E} = \vec{0} \quad \text{para} \quad r > b}$$

(b) A ddp V entre o cilindro e a casca é

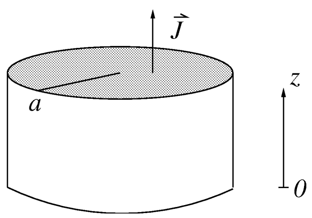
$$V = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b E(r)dr = -\int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\kappa r}dr \Longrightarrow \boxed{V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\kappa}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

(c) A capacitância para um comprimento ℓ do sistema é dada por

$$C = \frac{|Q|}{|V|} = \frac{\lambda\ell}{|V|} = \frac{\lambda\ell}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\kappa}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} \Longrightarrow \boxed{\frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0\kappa}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}}$$

Questão 2

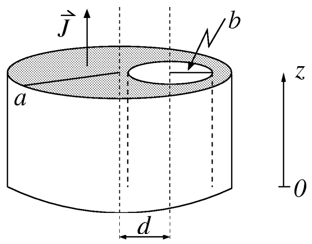
A densidade de corrente em um condutor cilíndrico muito longo de raio a é dada por $\vec{J} = J_0\vec{k}$, onde J_0 é uma constante, conforme mostra a figura.



(a) (0,5 ponto) Determine a corrente I através do condutor.

(b) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético dentro e fora do condutor

Perfura-se um buraco cilíndrico muito longo de raio b no condutor. O eixo do buraco é paralelo ao eixo do condutor. A distância entre os eixos é igual a d (veja a figura abaixo). A densidade de corrente $\vec{J}$ é mantida constante.



(c) (1,0 ponto) Usando idéias de superposição, calcule o campo magnético em pontos do eixo do buraco.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) A corrente I é dada por

$$\boxed{I = J_0 \pi a^2}$$

(b) A lei de Ampère é

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total}.$$

Devido à simetria cilíndrica, é conveniente escolher como contornos C círculos de raio r centrados no eixo de simetria do cilindro.

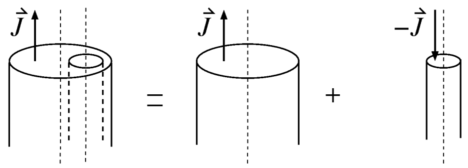
<u>Fora do condutor ($r > a$)</u>, a corrente I_{total} é a calculada no item (a)

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 I_{total} = \mu_0 J_0 \pi a^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{2r}\,\widehat{\theta}}$$

<u>Dentro do condutor ($r < a$)</u>, a corrente $I_{total} = J_0 \pi r^2$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r = \mu_0 I_{total} = \mu_0 J_0 \pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\,\widehat{\theta}}$$

(c) Pelo princípio de superposição, o campo magnético no cilindro com o buraco é igual ao campo produzido por um cilindro de raio a sem buracos, com uma densidade de corrente $\vec{J}$, somado ao campo produzido por um cilindro de raio b com uma densidade de corrente $-\vec{J}$, preenchendo o buraco.

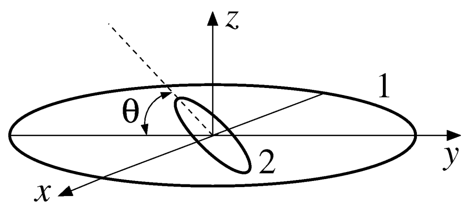


Como o campo produzido pelo cilindro de raio b no seu próprio eixo é zero (veja o item (b)), o campo no eixo do buraco é o produzido apenas pelo cilindro de raio de raio a a uma distância d de seu eixo:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B 2\pi d = \mu_0 I_{total} = \mu_0 J_0 \pi d^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 d}{2}\,\widehat{\theta}}$$

Questão 3

Dois anéis condutores concêntricos, não coplanares, estão dispostos conforme a figura. O anel 1 tem raio a, é composto por N espiras e é percorrido por uma corrente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, sendo I_0 e ω constantes. O anel 2 tem raio b, é muito menor do que o anel 1 ($b << a$) e tem apenas uma espira com resistência R. O plano do anel 2 forma um ângulo θ com o plano do anel 1.



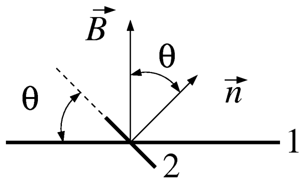
(a) (1,0 ponto) Calcule a fem induzida no anel 2 pelo anel 1 (Aproxime o campo magnético que aje sobre o anel 2 pelo campo magnético produzido pelo anel 1 no seu centro: $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a}$.).

(b) (1,0 ponto) Determine a indutância mútua entre os anéis.

(c) (0,5 ponto) Calcule o torque τ sobre o anel 2.

Solução da questão 3

(a)



O fluxo magnético no anel 2, produzido pelo anel 1 é

$$\Phi_{21} \approx \vec{B}_1 \cdot (\pi b^2 \vec{n}) = B_1 \pi b^2 \cos\theta$$

$$\Phi_{21} = \frac{N\mu_0 I_0}{2a}\cos(\omega t)\pi b^2 \cos\theta \Longrightarrow \boxed{\varepsilon = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = \frac{N\mu_0 I_0}{2a}\omega \text{sen}(\omega t)\pi b^2 \cos\theta}$$

(b) A indutância mútua M é dada por

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I} = \frac{N\mu_0 I \pi b^2 \cos\theta}{2aI} \Longrightarrow \boxed{M = \frac{N\mu_0 \pi b^2 \cos\theta}{2a}}$$

(c) O torque pode ser calculado através de $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_1$, onde $\vec{m} = I_2 \vec{A}_2$ é o momento magnético do anel 2. O vetor área $\vec{A}_2 = \pi b^2 \vec{n}$ e $I_2 = \varepsilon / R$ assim

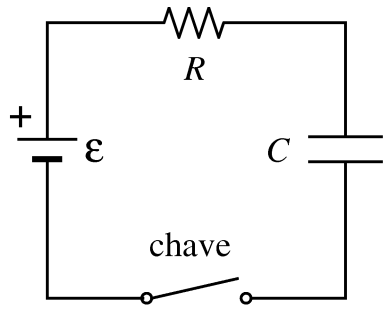
$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_1 = (I_2 \pi b^2 \vec{n}) \times (B_1 \vec{k}) = I_2 \pi b^2 B_1 \text{sen}\theta \vec{\imath}$$

$$\tau = \left(\frac{N\mu_0 I_0}{2aR}\omega \text{sen}(\omega t)\pi b^2 \cos\theta\right)\pi b^2 \left(\frac{N\mu_0 I_0}{2a}\cos(\omega t)\right)\text{sen}\theta$$

$$\boxed{\tau = \left(\frac{N\mu_0 I_0 \pi b^2}{2a}\right)^2 \frac{\omega\,\text{sen}(2\omega t)\text{sen}(2\theta)}{4R}}$$

Questão 4

Um capacitor descarregado e um resistor são ligados em série a uma bateria como vemos na figura. Em t=0 a chave é ligada.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial para a corrente no circuito depois da chave ser fechada.

(b) (1,0 ponto) Determine a corrente $I(t)$ no circuito (lembre que $I(0) = \varepsilon/R$).

(c) (1,0 ponto) Calcule a carga $q(t)$ no capacitor em função do tempo. Quanto vale $q(0)$?

Solução da questão 4

(a) Percorrendo a malha do circuito obtemos

$$\varepsilon - RI - \frac{q}{C} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\varepsilon - RI - \frac{q}{C}\right) = 0 \Longrightarrow 0 - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - R\frac{dI}{dt} = 0$$

Como $dq/dt = I$,

$$\boxed{R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0}$$

(b) A equação diferencial do item (a) pode ser reescrita como

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC} \Longrightarrow I(t) = Ae^{-t/RC},$$

onde A é uma constante. Lembrando que $I(0) = \varepsilon/R$ obtemos

$$\boxed{I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\,e^{-t/RC}}$$

(c) A carga e a corrente estão relacionadas através da expressão

$$\frac{dq}{dt} = I(t) = \frac{\varepsilon}{R}\,e^{-t/RC}$$

Em $t = 0$, $q = 0$

$$\Longrightarrow \int_0^q dq = \frac{\varepsilon}{R}\int_0^t e^{-t/RC}dt = -\,\frac{\varepsilon}{R}RCe^{-t/RC}\Big|_0^t$$

$$\boxed{q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q_m(1 - e^{-t/RC})}$$

Formulário

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad \Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1+\chi_m)\mu_0 \equiv K_m\mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$