PS

Física III

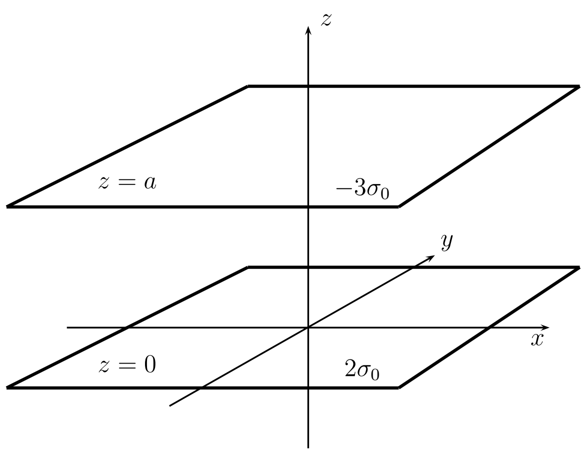
Escola Politécnica - 2008

FGE 2203 - GABARITO DA PS

10 de julho de 2008

Questão 1

Duas placas planas e infinitas situadas nos planos $z = 0$ e $z = a$ estão carregadas com densidades superficiais de carga $2\sigma_0$ e $-3\sigma_0$, respectivamente, como mostra a figura:



(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Gauss, calcule o vetor campo elétrico nas regiões $z < 0$, $0 < z < a$ e $z > a$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a diferença de potencial entre as pontos $z = a/2$ e $z = 2a$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) Para lei de Gauss, o campo elétrico de placa plana $z = d$ carregada com densidade superficial de cargas σ é igual a:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}, & z < d \\ +\hat{k}\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}, & z > d\ . \end{cases}$$

Os campos elétricos produzidos pelas placas com $\sigma = 2\sigma_0$ e $\sigma = -3\sigma_0$ são dados por:

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} -\hat{k}\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, & z < 0 \\ +\hat{k}\dfrac{\sigma_0}{\epsilon_0}, & z > 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{cases} +\hat{k}\dfrac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z < a \\ -\hat{k}\dfrac{3\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z > a \end{cases}$$

Usando o princípio da superposição, temos

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} \hat{k}\dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z < 0 \\ \hat{k}\dfrac{5\sigma_0}{2\epsilon_0}, & 0 < z < a \\ -\hat{k}\dfrac{\sigma_0}{2\epsilon_0}, & z > a\ . \end{cases}$$

(b) A diferença de potencial é dada por

$$V = V_{2a} - V_{a/2} = (V_{2a} - V_a) + (V_a - V_{a/2})$$

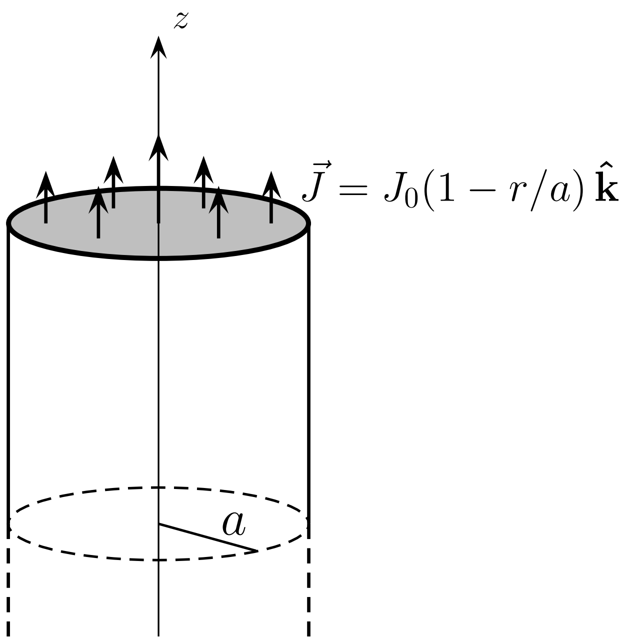
$$V_{2a} - V_a = (-a\hat{k}) \cdot (-\hat{k}\sigma_0/(2\epsilon_0)) = \frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

$$V_a - V_{a/2} = -\frac{a}{2}\frac{5\sigma_0}{2\epsilon_0} = -\frac{5}{2}\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = -\frac{3}{2}\frac{a\sigma_0}{2\epsilon_0}\ .}$$

Questão 2

Considere um fio retilíneo infinito, de seção reta constante, circular e de raio a, que é percorrido por uma corrente estacionária não uniforme dada por $\vec{J} = J_0(1 - r/a)\,\hat{\mathbf{k}}$, onde r é a distância do ponto em consideração ao eixo do fio (eixo z):



(a) (1,0 ponto) Calcule a corrente total que flui por esse fio.

(b) (1,5 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}$ para $r < a$ e $r > a$.

Solução da questão 2

(a) A corrente I através do fio é o fluxo de $\vec{J}$ através do fio:

$$I = \int_{fio} \vec{J} \cdot \hat{n} dA = \int_0^a J(2\pi r\, dr) = 2\pi J_0 \int_0^a \left(1 - \frac{r}{a}\right) r\, dr = 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}\right)\Big|_0^a$$

$$= 2\pi J_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a}\right) \Longrightarrow \boxed{I = \frac{\pi J_0 a^2}{3}} .$$

(b) Por simetria, o campo magnético circula o fio no sentido dado pela regra da mão direita. Aplicando a lei de Ampère a um circuito circular concêntrico ao fio e perpendicular a $\hat{k}$, obtemos:

$$B(2\pi r) = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} ,$$

onde I_{int} é a corrente através de uma superfície qualquer delimitada pelo circuito.

Para um ponto fora do fio (a uma distância r do eixo, $r > a$), temos:

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{\pi J_0 a^2}{3} \quad \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{6r}} .$$

Se o ponto é interior ao fio ($r < a$), a corrente é:

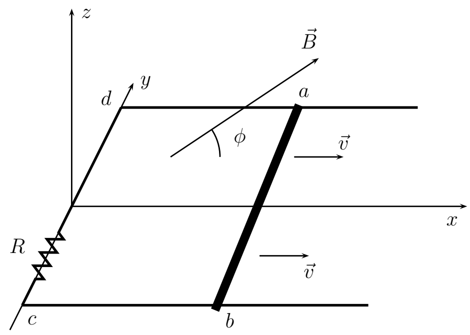
$$I_{int} \;=\; \int_0^r J(2\pi r\, dr) \;=\; 2\pi J_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a}\right) ,$$

e o campo:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I_{int}}{2\pi r} = \mu_0 J_0 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3a}\right)} .$$

Questão 3

Uma barra condutora ab de comprimento L é mantida sobre trilhos e se desloca com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{i}$, conforme a figura:



O campo magnético uniforme $\overrightarrow{B}$ forma um ângulo ϕ com a plano XY. A resistência do circuito $abcd$ é igual R.

(a) (0,5 ponto) Qual é o sentido da corrente induzida: de a para b ou de b para a? Justifique sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Calcule o módulo da corrente induzida no circuito.

(c) (1,0 ponto) Calcule a força externa que atua sobre a barra.

Solução da questão 3

(a) Escolhemos a normal como sendo $\hat{k}$. Com essa convenção, quando a barra se desloca, o fluxo magnético aumenta. Uma corrente é induzida no sentido de diminuir a fluxo magnético, correspondente ao <u>sentido $b \to a$</u>.

(b) O fluxo magnético através o circuito é $\Phi_m = LxB\text{sen}\phi$ e

$$|\mathcal{E}| = |\frac{d\Phi_m}{dt}| = LvB\text{sen}\phi$$

$$\boxed{I = |\mathcal{E}|/R = \frac{LvB\text{sen}\phi}{R}.}$$

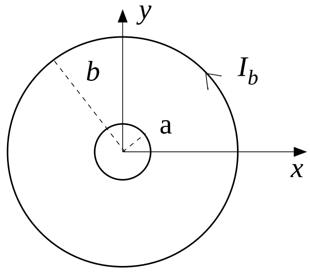
(c) A força magnética sobre a barra é

$$\overrightarrow{F} = I\overrightarrow{L} \times \overrightarrow{B} = I(L\hat{\jmath}) \times (B\cos\phi\hat{\imath} + B\text{sen}\phi\hat{k})$$
$$= ILB(-\cos\phi\hat{k} + \text{sen}\phi\hat{\imath})$$

$$\text{v} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{F}_{ext} = -\overrightarrow{F} = ILB(\cos\phi\hat{k} - \text{sen}\phi\hat{\imath})}$$

Questão 4

Considere duas espiras circulares, planas, orientadas ao longo do plano xy. As espiras têm raio a e b, com $a \ll b$. Pela espira maior passa uma corrente I_b com sentido dado pela figura.



(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Biot-Savart, calcule o campo magnético $\overrightarrow{B_0}$ criado pela espira grande no centro da espira pequena, ou seja, na origem.

Se você não resolveu o item (a), resolva os itens (b) e (c) em função de $\overrightarrow{B_0}$.

(b) (1,0 ponto) Usando o fato de o campo magnético não variar muito dentro da espira pequena, obtenha uma expressão aproximada para a indutância mútua entre as espiras.

(c) (0,5 ponto) Liga-se a espira pequena a um gerador AC, produzindo-se nessa espira uma corrente $I_a(t) = I_0\text{sen}(\omega t)$. Qual a fem induzida $\mathcal{E}_{ba}$ na espira grande?

Formulário

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r},$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI,$$

$$\Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}.$$

Solução da questão 4

(a) Pela lei de Biot-Savart:

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{\mu_0 I_b}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \, ,$$

onde a integral é sobre a espira de raio b e $\hat{r}$ é o vetor unitário que parte de $\overrightarrow{dl}$ e aponta para a origem. Claramente, $\overrightarrow{dl} \perp \hat{r}$, de modo que $\overrightarrow{dl} \times \hat{r} = dl\,\hat{k} = b\,d\theta\,\hat{k}$. Assim:

$$\boxed{\overrightarrow{B_0} = \frac{\mu_0 I_b}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(b\,d\theta)}{b^2}\,\hat{k} \; = \frac{\mu_0 I_b}{2b}\,\hat{k}} \, .$$

(b) Para calcular a indutância mútua M_{ab} da bobina de raio b com relação à bobina de raio a precisamos do fluxo Φ_{ab} do campo magnético da bobina maior através de uma superfície delimitada pela bobina menor. Vamos calcular esse fluxo através do disco de raio a. Como sugere o enunciado, ao longo de todo o disco o campo magnético possui aproximadamente o mesmo valor, a saber, $\overrightarrow{B_0}$, calculado no item (a). Portanto, Φ_{ab} é dado simplesmente por:

$$\Phi_{ab} = B_0 \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_b}{2b} \, .$$

Por definição:

$$\boxed{M_{ab} = \frac{\Phi_{ab}}{I_b} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}} \, .$$

(c) Pela lei de Faraday:

$$\mathcal{E}_{ba} = -M_{ba} \frac{dI_a}{dt} \, .$$

É muito difícil calcular M_{ba} a partir do fluxo Φ_{ba}, pois não temos o campo magnético criado pela espira pequena. Porém, sabemos que $M_{ba} = M_{ab}$, e M_{ab} já foi calculada no item (b). Portanto:

$$\boxed{\mathcal{E}_{ba} = -M_{ab} \frac{dI_a}{dt} = \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega I_0 \cos(\omega t)}{2b}} \, .$$