P1

Física III

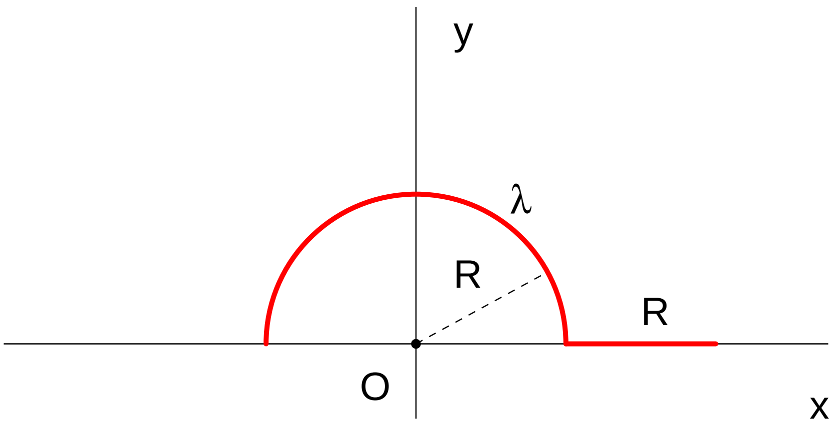
Escola Politécnica - 2009

FGE 2203 - GABARITO DA P1

2 de abril de 2009

Questão 1

Um fio isolante com densidade linear de carga uniforme λ é dobrado na forma mostrada abaixo.

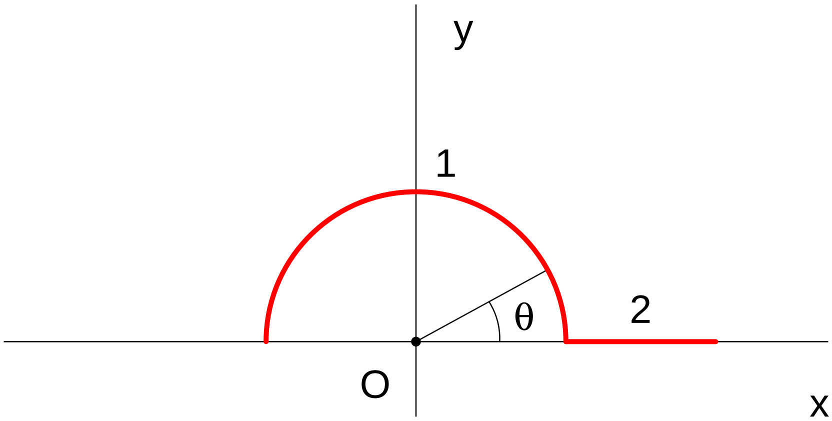


(a) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ na origem O devido ao semi-círculo.

(b) (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico $\vec{E}$ na origem O devido ao segmento de reta.

(c) (0,5 pontos) Uma carga pontual q é colocada na origem. Determine a força total $\vec{F}_{\text{fio}}$ sobre o fio exercida pela carga q.

Solução da questão 1



(a) O campo devido ao trecho 1 é dado por

$$\vec{E}_1 = \int_1 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \int_0^\pi \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-R\cos\theta\vec{\imath} - R\text{sen}\theta\vec{\jmath})}{R^3} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\vec{\jmath}.$$

(b) O campo devido ao trecho 2 é

$$\vec{E}_2 = -\int_2 \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\vec{\imath} = -\int_R^{2R}\frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2}\vec{\imath} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{x}\Big|_R^{2R}\vec{\imath} = -\frac{\lambda}{8\pi\epsilon_0 R}\vec{\imath}$$

(c) A força que o fio exerce sobre a carga é

$$\vec{F} = q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = -\left(\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\right)\left(\frac{1}{4}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right).$$

Como a lei de Coulomb satisfaz a lei de ação e reação,

$$\vec{F}_{fio} = -\vec{F} = \left(\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\right)\left(\frac{1}{4}\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right).$$

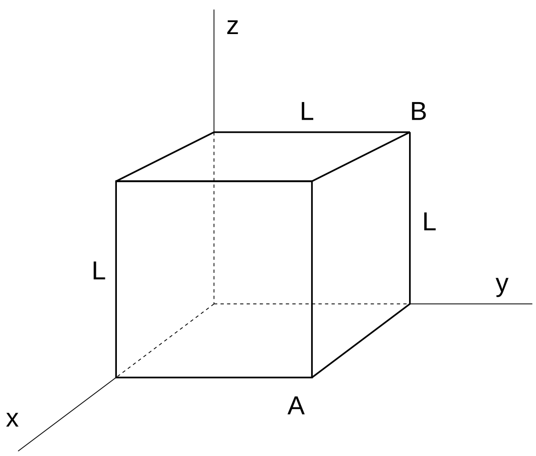
Questão 2

O potencial elétrico numa certa região do espaço é

$$V = axy + by^2 + cyz.$$

(a) (0,5 ponto) Determine o campo elétrico $\vec{E}$ nessa região.

(b) (1,0 ponto) Determine o fluxo do campo elétrico na face superior do cubo de lado L mostrado na figura. Adote a normal apontando para fora do cubo.



(c) (0,5 ponto) Calcule o trabalho que deve ser realizado por um agente externo para levar uma carga q do vértice A ao vértice B do cubo.

(d) (0,5 ponto) Se uma carga q for colocada no centro do cubo em quanto mudará o fluxo através da face superior do cubo?

Solução da questão 2

(a) O campo elétrico é

$$\vec{E} = -\nabla V = -ay\vec{i} - (ax + 2by + cz)\vec{j} - cy\vec{k}.$$

(b) O fluxo na face superior do cubo é

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{E} \cdot (\vec{k}dA) = \int_S E_z dA = \int_0^L (-cy)(Ldy) = -\frac{cL^3}{2}.$$

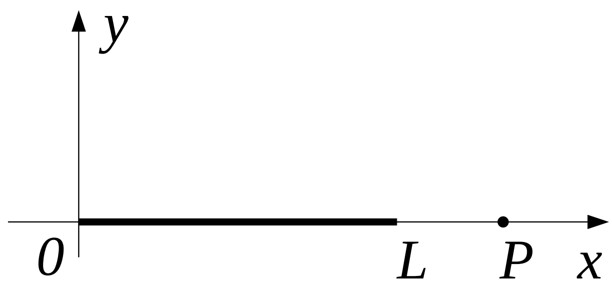
(c) O trabalho que deve ser realizado é

$$W_{A\to B} = q(V_B - V_A) = q\left[(b+c)L^2 - (a+b)L^2\right] = q(c-a)L^2.$$

(d) Pela lei de Gauss o fluxo da carga q através de **todas** as faces do cubo será igual a q/ϵ_0. Como a carga está no centro do cubo cada face contribuirá igualmente para este fluxo. Assim, o acréscimo no fluxo através da face superior será de $q/(6\epsilon_0)$.

Questão 3

Um fio de comprimento L, com uma densidade linear de carga $\lambda(x) = Ax$, onde $A > 0$ é uma constante, está colocado ao longo do eixo x conforme a figura.



Determine:

(a) (1,0 ponto) O potencial $V(x)$ para um ponto P do eixo x com coordenada $x > L$. Adote $V = 0$ no infinito.

(b) (1,0 ponto) Uma carga $q > 0$ com massa m, em uma região muito afastada do fio, é lançada sobre o eixo x com velocidade $-v\vec{\imath}$. Qual é a velocidade v para que a carga se aproxime de uma distância L da ponta direita do fio antes de retornar?

(c) (0,5 ponto) Sabendo-se que a carga total do fio é igual a Q, determine a constante A que aparece em $\lambda(x)$.

Solução da questão 3

(a) A distância entre um elemento de carga $dq = \lambda(x')dx'$ do fio, situado em $x = x'$, e o ponto P é $x - x'$. Neste caso o potencial é dado por

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda(x')dx'}{x - x'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{Ax'dx'}{x - x'} = -\frac{A}{4\pi\epsilon_0}\left[x' + x\log(x - x')\right]_0^L$$

$$= -\frac{A}{4\pi\epsilon_0}\left[L + x\log\left(\frac{x - L}{x}\right)\right]$$

(b) No infinito, toda a energia é cinética. Quando a carga parar sua energia será toda potencial e é igual a $qV(2L)$. A conservação de energia fornece

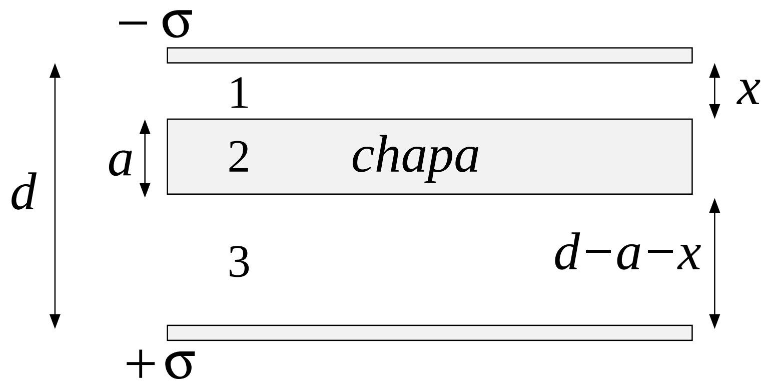
$$\frac{1}{2}mv^2 = qV(2L) \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{qAL}{4\pi\epsilon_0}(2\log 2 - 1) \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{qAL}{2\pi\epsilon_0\, m}(2\log 2 - 1)}$$

(c) A carga total é dada por

$$Q = \int_0^L \lambda(x')dx' = \int_0^L Ax'dx' = \left.\frac{Ax'^2}{2}\right|_0^L = \frac{AL^2}{2} \Longrightarrow A = \frac{2Q}{L^2}$$

Questão 4

As placas condutoras de um capacitor plano têm área A, estão separadas por uma distância d, e têm uma densidade superficial de carga σ. Entre estas placas coloca-se uma chapa condutora de área A e espessura a, conforme mostra a figura.



Nos itens abaixo, ignore o campo elétrico nas bordas dos condutores.

(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Gauss, calcule o campo nas regiões 1, 2 e 3 entre as placas do capacitor (veja a figura). Em seguida, calcule a diferença de potencial entre as placas.

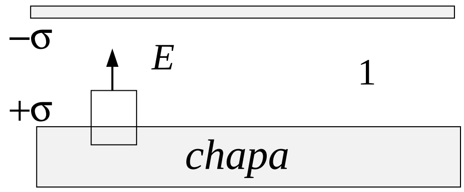
(b) (0,5 ponto) Mostre que a capacitância do sistema formado pelo capacitor e pela chapa metálica independe da distância x entre a chapa e a placa superior do capacitor.

(c) (1,0 ponto) Usando a expressão para a densidade de energia por unidade de volume, $u_e = \epsilon_0 E^2/2$, calcule a energia armazenada no capacitor.

Solução da questão 4

(a) Na região 2, dentro da chapa metálica, $E = 0$.

Na região 1, escolhemos uma superfície gaussiana cilíndrica com uma das "tampas" dentro da chapa metálica. Como o campo é vertical, o fluxo é diferente de zero apenas na "tampa" superior.



A lei de Gauss fornece

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Longrightarrow E\Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

Este raciocínio pode ser aplicado na região 3 fornecendo o mesmo resultado para o campo.

A diferença de potencial V entre as placas é

$$V = E(d-a-x) + Ex = E(d-a) = \frac{\sigma(d-a)}{\epsilon_0}.$$

(b) A capacitância C é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{\frac{\sigma(d-a)}{\epsilon_0}} = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}$$

e o resultado independe de x.

(c) Apenas nas regiões 1 e 3 $E \neq 0$. Além disto, o campo é uniforme. Portanto, a energia nestas regiões é dada pelo produto da densidade de energia pelos volumes destas regiões.

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}E^2[xA + (d-a-x)A] = \frac{\epsilon_0}{2}E^2(d-a)A = \frac{1}{2}\frac{(d-a)A\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2C}Q^2$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k},$$

$$C = \frac{|Q|}{|V|}, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$

Algumas integrais

$$\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b) \quad ; \quad \int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$$