P2

Física III

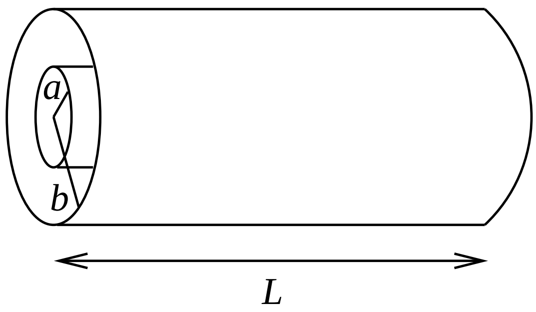
Escola Politécnica - 2009

FGE 2203 - GABARITO DA P2

14 de maio de 2009

Questão 1

Considere um capacitor cilíndrico de raio interno $\underline{a}$, raio externo $\underline{b}$ e comprimento $L >> b$, conforme a figura.



Sejam $+Q$ e $-Q$ as cargas livres nos cilindros de raios a e b, respectivamente. O espaço entre os cilindros é inteiramente preenchido com um material de constante dielétrica κ. Ignorando-se a região das bordas, campo elétrico entre os cilindros na ausência do dielétrico é dado por

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}\,\widehat{e}_r.$$

(a) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico dentro do dielétrico ($a < r < b$).

(b) (1,0 ponto) Calcule, a partir da definição, a capacitância na ausência do dielétrico e com o dielétrico.

(c) (1,0 ponto) Determine as densidades superficiais de carga induzidas σ_i no dielétrico devido à polarização em $r = a$ e em $r = b$.

Solução da questão 1

(a) Na presença do dielétrico o campo é reduzido por um fator igual a κ.

$$\vec{E} = \frac{1}{\kappa}\vec{E}_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 \kappa L r}\,\widehat{e}_r.$$

(b) A capacitância $C = Q/|V|$, assim falta apenas calcular a ddp entre as duas placas.

(I) <u>Sem dielétrico</u>,

$$V = -\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L r}dr = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Longrightarrow C_0 = \frac{Q}{|V|} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

(II) <u>Com dielétrico</u> o campo é reduzido por um fator κ. Desta forma a diferença de potencial é reduzida pelo mesmo fator e a capacitância é multiplicada por κ.

$$C = \kappa C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 \kappa L}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$$

(c) A carga induzida σ_i na superfície dos dielétricos é dada por

$$\sigma_i = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right),$$

onde σ é a densidade superficial de carga nas placas do capacitor. Logo,

(I) Em <u>$r = a$</u>,

$$\sigma_i = -\sigma|_{r=a}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = -\frac{Q}{2\pi a L}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

(II) Em <u>$r = b$</u>,

$$\sigma_i = -\sigma|_{r=b}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) = \frac{Q}{2\pi b L}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)$$

Questão 2

A região entre duas cascas esféricas condutoras concêntricas de raios R_1 e R_2 com $R_2 > R_1$ é preenchida com um material de resistividade elétrica ρ. Uma diferença de potencial V_0 é mantida entre os condutores. A casca esférica interna está num potencial mais alto do que a casca esférica externa. Um amperímetro mede a passagem de uma corrente I_0 entre esses condutores.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ na região onde $R_1 < r < R_2$

(b) (0,5 ponto) Assumindo que o condutor obedece a lei de Ohm, determine o vetor campo elétrico entre as esferas.

(c) (1,0 ponto) Calcule a resistência desse sistema em função de ρ, R_1 e R_2.

Solução da questão 2

(a) A corrente flui radialmente, logo $\vec{J} = J(r)\widehat{e}_r$. A corrente que passa por uma superfície esférica S de raio r concêntrica com as duas esferas é I_0 (conservação da carga). Assim,

$$I_0 = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_S J(r) dA = J(r) \int_S dA = J(r) 4\pi r^2 \Longrightarrow \vec{J}(r) = \frac{I_0}{4\pi r^2}\, \widehat{e}_r.$$

(b) Pela lei de Ohm, $\vec{J} = \sigma \vec{E} = \vec{E}/\rho$. Logo,

$$\vec{E} = \rho \vec{J}(r) = \frac{\rho I_0}{4\pi r^2}\, \widehat{e}_r.$$

(c) Podemos calcular R através da expressão $V = RI$, onde

$$V = \left| -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right| = \left| -\int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho I_0}{4\pi r^2} dr \right| = \frac{\rho I_0 (R_2 - R_1)}{4\,\pi\, R_2\, R_1}$$

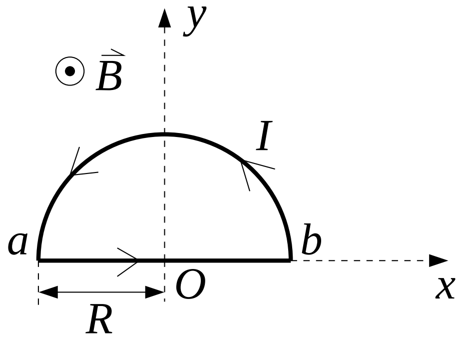
$$\Longrightarrow R = \frac{V}{I_0} = \frac{\rho (R_2 - R_1)}{4\,\pi\, R_2\, R_1}.$$

A mesma solução pode ser obtida diretamente através de

$$R = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{A(r)} dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho}{4\pi r^2} dr = \frac{\rho (R_2 - R_1)}{4\,\pi\, R_2\, R_1}.$$

Questão 3

Na figura abaixo o campo magnético $\vec{B} = B\vec{k}$ é uniforme e perpendicular ao plano da figura, apontando para fora. A espira é formada por uma semi-circunferência de raio R e por um segmento retilíneo de comprimento $2R$, situado sobre o eixo Ox. Pela espira circula uma corrente I no sentido anti-horário.



(a) (1,0 ponto) Partindo da equação $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$, calcule a força magnética resultante sobre o segmento reto da espira.

(b) (1,0 ponto) Partindo da equação $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$, calcule a força magnética resultante sobre o segmento semi-circular da espira.

(c) (0,5 ponto) Calcule a força total sobre a espira e o torque que age sobre ela.

Solução da questão 3

(a) No trecho reto, $d\vec{\ell} \times \vec{B} = -d\ell\, B\, \vec{\jmath}$

$$\vec{F}_1 = I \int_a^b d\vec{\ell} \times \vec{B} = -IB \int_a^b d\ell\, \vec{\jmath} = -IB2R\, \vec{\jmath},$$

ou

$$\vec{F}_1 = I \left(\int_a^b d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I\, \vec{ab}\, \times \vec{B} = -IB2R\, \vec{\jmath}.$$

(b) No trecho semi-circular, $d\vec{\ell} = d\ell\widehat{\theta}$. Assim, $d\vec{\ell} \times B\vec{k} = Bd\ell\widehat{r}$, onde $\widehat{r} = \cos\theta\vec{\imath} + \mathrm{sen}\theta\vec{\jmath}$.

$$\vec{F}_2 = I \int_b^a d\vec{\ell} \times \vec{B} = IB \int_b^a \widehat{r} d\ell = IB \int_0^\pi (\cos\theta\vec{\imath} + \mathrm{sen}\theta\vec{\jmath}) R d\theta = IB2R\vec{\jmath},$$

ou

$$\vec{F}_2 = I \left(\int_b^a d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = I\, \vec{ba}\, \times \vec{B} = IB2R\, \vec{\jmath}.$$

(c) Somando os resultados dos itens (a) e (b) obtemos $\vec{F} = \vec{0}$. Ou

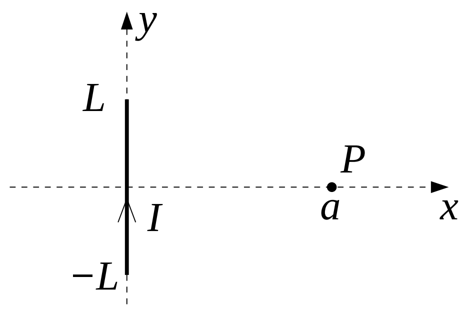
$$\vec{F} = I \left(\oint d\vec{\ell} \right) \times \vec{B} = \vec{0}.$$

O torque pode ser calculado com a equação

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (I\, \frac{\pi R^2}{2}\, \vec{k}) \times (B\vec{k}) = \vec{0}.$$

Questão 4

Considere um fio retilíneo de comprimento $2L$, delgado, com uma corrente constante I, esticado ao logo do eixo y, como mostra a figura abaixo.



(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Biot-Savart calcule o campo $\vec{B}$ gerado pelo fio num ponto P do eixo x a uma distância a do fio.

(b) (1,0 ponto) Suponha agora que o fio seja infinitamente longo, ou seja, que $L \to \infty$. Calcule o campo $\vec{B}$ gerado pelo fio no ponto P usando a lei de Ampère. Compare o resultado com o obtido fazendo o limite $L \to \infty$ na expressão do item (a).

Formulário

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad C = |Q|/|V|, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots, \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \sigma_i = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right), \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = nqv_dA,$$

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

Algumas integrais

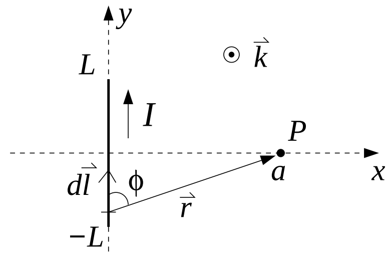
$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \log(x + \sqrt{c+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \sqrt{c+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}},$$

Solução da questão 4

(a) O campo magnético produzido no ponto P

pelo pedaço $d\vec{\ell}$ do fio é dado por



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}}{r^3},$$

onde $d\vec{\ell} = dy\,\vec{\jmath}$ e $r = \sqrt{y^2+a^2}$

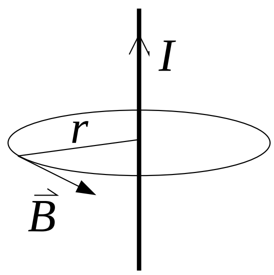
Da figura obtemos $d\vec{\ell}\times\vec{r} = -dy\, r\,\text{sen}\phi\,\vec{k}$ e $\text{sen}\phi = a/\sqrt{y^2+a^2}$. Assim,

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0\, I\, a}{4\pi}\frac{dy\,\vec{k}}{(y^2+a^2)^{3/2}} \Longrightarrow \vec{B} = -\frac{\mu_0\, I\, a}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{dy}{(y^2+a^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\,\vec{k}}$$

(b) A lei de Ampère fornece

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, I$$



Como $\vec{B}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$ e $B = B(r)$ podemos escrever

$$\oint B\, d\ell = B(r)\oint d\ell = B2\pi r = \mu_0\, I \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}$$

No ponto P, $r = a$ e

$$\boxed{\vec{B}(a) = -\frac{\mu_0\, I}{2\pi a}\,\vec{k}}$$

Este é exatamente o resultado que encontramos tomando o limite $L\to\infty$ na expressão encontrada no item (a).