P3

Física III

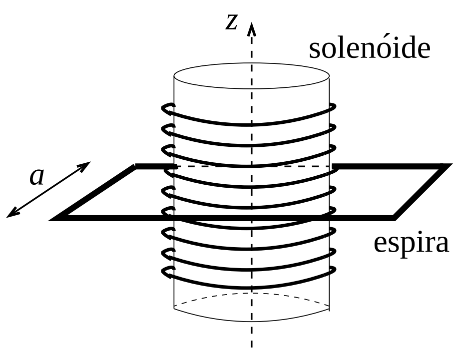
Escola Politécnica - 2009

FGE 2203 - GABARITO DA P3

25 de junho de 2009

Questão 1

Um solenóide longo de raio R tem um enrolamento uniforme de N espiras num comprimento h, e é prenchido por um material de susceptibilidade magnética χ_m. Uma corrente I percorre o solenóide. Uma espira quadrada de lado $a > 2R$, está localizada perpendicularmente ao solenóide, conforme a figura.



(a) (0,5 ponto) Calcule o modúlo do campo magnético no solenóide sabendo-se que no vácuo seu valor é $\mu_0 NI/h$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide e a energia magnética nele armazenada.

(c) (1,0 ponto) Calcule o fluxo magnético através da espira quadrada e a indutância mútua entre a espira e o solenóide.

Solução da questão 1

(a) O campo magnético total é a soma do campo aplicado e do campo produzido pelos dipolos magnéticos do material.

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0$$

$$\Longrightarrow \boxed{B = (1 + \chi_m)\frac{\mu_0 N I}{h}}$$

(b) Denominando ϕ_B o fluxo de B através de uma espira, podemos obter a auto-indutância através de

$$\left.\begin{array}{l} L = \dfrac{\Phi_B^{\text{total}}}{I} = \dfrac{N\phi_B}{I} \\ \phi_B = (1 + \chi_m)\dfrac{\mu_0 N I}{h}\,\pi R^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{L = (1 + \chi_m)\frac{\mu_0 N^2}{h}\,\pi R^2}$$

A energia é dada por

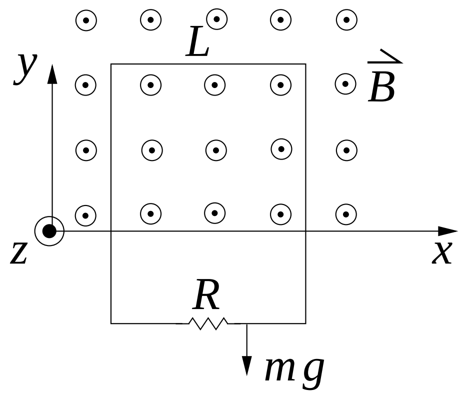
$$\boxed{U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(1 + \chi_m)\frac{\mu_0 N^2}{h}\,\pi R^2 I^2}$$

(c) O fluxo através da espira quadrada, devido ao solenóide, é igual ao fluxo através de uma espira do solenóide. Usando os resultados do item (b) obtemos a indutância mútua M.

$$\boxed{M = \frac{\phi_B}{I} = (1 + \chi_m)\frac{\mu_0 N}{h}\,\pi R^2}$$

Questão 2

Uma espira retangular de largura L, resistência R e massa m está caindo, sob a ação do campo gravitacional, em uma região onde há um campo magnético uniforme como indicado na figura abaixo (não há campo magnético abaixo do eixo x).



(a) (0,5 ponto) Usando a lei de Lenz, explique qual é o sentido da corrente produzida na espira (horário ou anti-horário).

(b) (1,0 ponto) Obtenha a corrente induzida na espira em função da velocidade instantânea de queda $v = dy/dt$. Note que $v < 0$.

(c) (1,0 ponto) Determine a força magnética sobre a espira (módulo, sentido e direção). Suponha que antes de sair totalmente da região com campo magnético a espira atinja uma *velocidade limite* v_ℓ (movimento com aceleração nula). Escreva a equação de movimento da espira e calcule a velocidade limite v_ℓ.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) À medida que a espira cai, o fluxo do campo saindo da folha diminui. De acordo com a lei de Lenz, o campo gerado pela corrente induzida deverá se opor a esta diminuição. Logo, a corrente será induzida no sentido anti-horário.

(b) A corrente na espira é dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d(BLy)}{dt} = -\frac{BL}{R}\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \boxed{I = -\frac{BL}{R}v}$$

(note que $v < 0$).

(c) A força magnética relevante é a que atua no trecho horizontal superior da espira, as forças nos trechos verticais se cancelam.

$$\vec{F}_B(v) = I\vec{L} \times \vec{B} = \left(-\frac{BL}{R}v\right)(-L\widehat{x}) \times (B\widehat{z}) \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_B(v) = \frac{B^2L^2}{R}(-v)\widehat{y}}$$

Como $v = dy/dt < 0$, esta força está orientada para cima.

A equação de movimento é

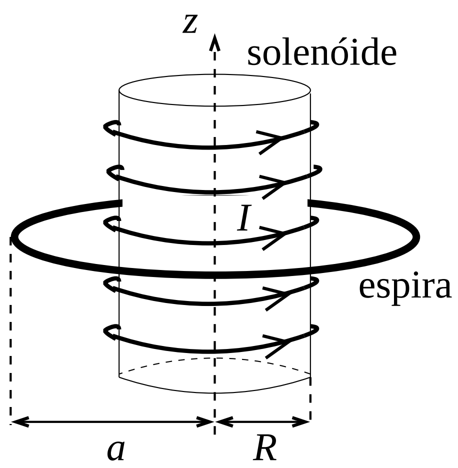
$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = -mg\widehat{y} + \vec{F}_B(v)}$$

Ao atingir a velocidade limite $d\vec{v}/dt = 0$, e portanto $-mg\widehat{y} + \vec{F}_B(v_\ell) = 0$. Usando a expressão para $\vec{F}_B$, teremos

$$\boxed{v_\ell = -\frac{mgR}{B^2L^2}}$$

Questão 3

Um solenóide longo tem raio R, N espiras num comprimento h e é percorrido por uma corrente I gerando um campo magnético de módulo $\mu_0 NI/h$. A corrente cresce com o tempo como $I = Kt$ ($K > 0$) e percorre as espiras do solenóide no sentido anti-horário quando visto de cima, como indicado na figura. Uma espira condutora circular de raio $a > R$ é coaxial com o solenóide.



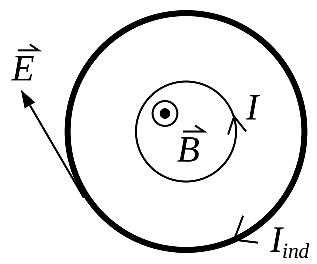
(a) (0,5 ponto) Qual é o sentido da força eletromotriz (fem) induzida na espira maior quando vista de cima? Justifique.

(b) (1,0 ponto) Calcular a fem induzida na espira maior.

(c) (1,0 ponto) Calcular o módulo do campo elétrico induzido $|\vec{E}|$ na espira maior.

Solução da questão 3

(a) O sentido da corrente induzida na espira é dado pela lei de Lenz. Como o fluxo magnético através da espira aumenta com o tempo, a corrente na espira vai gerar um campo magnético com direção oposta ao do solenóide para se opor ao aumento do fluxo.



(b) A fem induzida na espira maior é dada pela lei de Faraday.

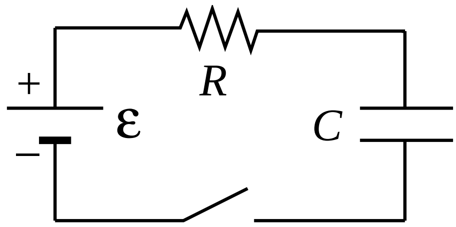
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt}(B\pi R^2) \Longrightarrow \boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 NK}{h}\pi R^2}$$

(c) Para calcular o campo elétrico induzido basta lembrar que

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -|\vec{E}|2\pi a \Longrightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{\mu_0 NKR^2}{2ha}}$$

Questão 4

Um capacitor descarregado e um resistor são ligados em série a uma bateria como vemos na figura. Em $t = 0$ a chave é ligada.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação para a soma das quedas de tensão (voltagens) através dos elementos do circuito. Lembrando que o capacitor estava inicialmente descarregado, mostre que $I(0) = \mathcal{E}/R$.

(b) (1,0 ponto) Obtenha a equação diferencial para a corrente $I(t)$ no circuito. Resolva a equação e determine a corrente $I(t)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a potência $P_b(t)$ fornecida pela bateria e potência $P_R(t)$ dissipada pela resistência. Se não forem iguais, explique o por quê.

FORMULÁRIO

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad V = RI, \quad P = RI^2, \quad P = VI,$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 \equiv K_m \mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi^{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi^{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$

Solução da questão 4

(a) A soma das voltagens através do circuito é zero. Assim,

$$\boxed{\mathcal{E} - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0.}$$

Em $t = 0$, $Q = 0$ e a equação acima fornece $I(0) = \mathcal{E}/R$.

(b) Derivando a equação do item (a) em relação ao tempo obtemos

$$\boxed{R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0} \Longleftrightarrow -\frac{1}{RC} = \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}$$

Integrando em t obtemos

$$-\int_0^t \frac{dt}{RC} = \int_0^t \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I} \Longrightarrow -\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{I(t)}{I(0)}\right) \Longrightarrow \boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right),}$$

onde usamos $I(0) = \mathcal{E}/R$.

(c) A potência fornecida pela bateria é

$$\boxed{P_b(t) = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$$

A potência dissipada no resistor é

$$\boxed{P_R(t) = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\exp\left(-\frac{2t}{RC}\right)}$$

A diferença é devida à variação de energia no capacitor.