PR

Física III

Escola Politécnica - 2009

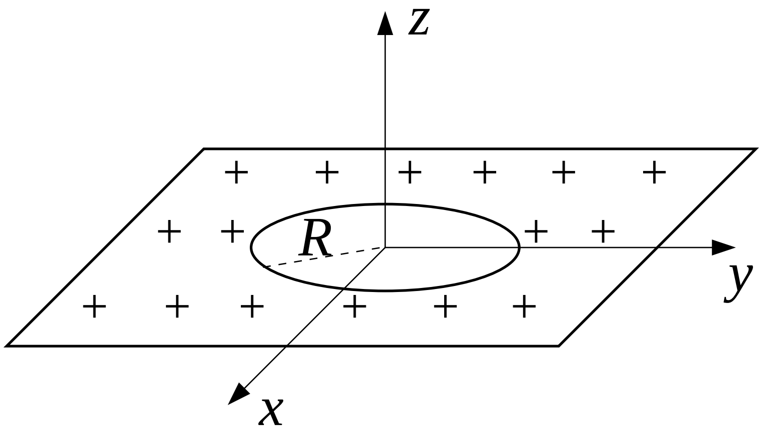
FGE 2203 - GABARITO DA PR

23 de julho de 2009

Questão 1

(I) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto do eixo de um anel uniformemente carregado com carga Q.

(II) Considere um plano com densidade superficial de carga $\sigma > 0$. Neste plano há um buraco de raio R conforme mostra a figura.

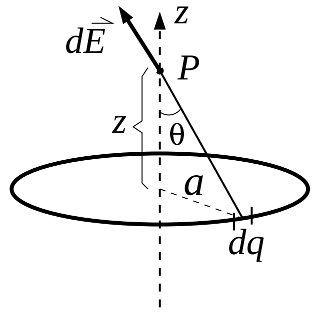


(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em um ponto do eixo do buraco (eixo z).

(b) (0,5 ponto) Para $z \approx 0$, sobre o eixo z, determine a força que aje sobre uma carga $-q < 0$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(I) Campo do anel



Devido à simetria, apenas a componente z do campo é diferente de zero.

$$dE = dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{a^2+z^2}\cos\theta, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \frac{z}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\int dq\,\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{z\,Q\,\vec{k}}{4\pi\epsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}}$$

(II) Campo no eixo do buraco

(a) O plano com buraco pode ser visto como uma coleção de anéis concêntricos com raios r ($r \geq R$). O campo de um destes anéis de raio r e largura dr é

$$d\vec{E} = \frac{z\,dq}{4\pi\epsilon_0(r^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}, \quad dq = \sigma 2\pi r dr$$

$$\Longrightarrow \vec{E} = \int_R^\infty \frac{z\,\sigma}{2\epsilon_0}\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k} = -\vec{k}\,\frac{z\,\sigma}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\Bigg|_R^\infty \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{z\,\sigma\,\vec{k}}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}}$$

(b) Para $z \approx 0$, o campo elétrico sobre o eixo z é aproximadamente linear e a força sobre uma carga $-q$ é dada por

$$\vec{E} \approx \frac{z\,\sigma}{2\epsilon_0 R}\,\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{F} \approx -\frac{q\,z\,\sigma}{2\epsilon_0 R}\,\vec{k}}$$

Questão 2

Um cilindro muito longo de raio a e com seu eixo orientado ao longo do eixo Oz, possui uma densidade de corrente dada por

$$\vec{J} = \begin{cases} J_0 \left[1 - \left(\dfrac{3r}{2a}\right)\right] \vec{k} \quad \text{para} \quad r \leq a \\ \vec{0} \quad \text{para} \quad r > a, \end{cases}$$

onde r é a distância radial entre o eixo do cilindro e o ponto onde se quer determinar $\vec{J}$.

(a) (1,0 ponto) Obtenha a expressão para a corrente $I(r)$ que passa por uma seção reta circular do cilindro com raio $r \leq a$ e centralizada sobre o eixo do cilindro.

(b) (1,0 ponto) Aplicando a lei de Ampère, deduza a expressão para o módulo do campo magnético B na região $r < a$.

(c) (0,5 ponto) Aplicando a lei de Ampère, deduza a expressão para o módulo do campo magnético B na região $r > a$.

Solução da questão 2

(a) A corrente através da seção reta de raio r é dada por

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^r J(r) 2\pi r dr = \int_0^r J_0 \left(1 - \frac{3r}{2a}\right) 2\pi r dr = J_0 \pi \left(r^2 - \frac{r^3}{a}\right)$$

$$\boxed{I(r) = J_0 \pi \left(r^2 - \frac{r^3}{a}\right), \quad r \leq a}$$

(b) A lei de Ampère fornece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Devido à simetria cilíndrica do problema, o campo magnético $\vec{B} = B(r)\widehat{\phi}$. Usando a lei de Ampère e escolhendo C como um círculo de raio r contido na seção reta e concêntrico com o fio obtemos

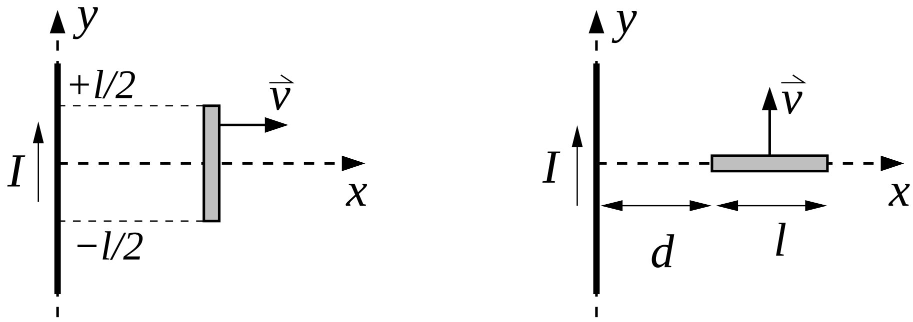
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I(r) \Longrightarrow \boxed{B(r) = \frac{J_0}{2} \left(r - \frac{r^2}{a}\right), \quad r \leq a}$$

(c) Note que a corrente total que passa pelo fio é zero ($I(a) = 0$). Assim, usando a simetria do sistema e a lei de Ampère obtemos

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = 0 \Longrightarrow \boxed{B(r) = 0, \quad r > a}$$

Questão 3

Um fio condutor muito longo, reto, é percorrido por uma corrente constante I, de modo que ele gera um campo magnético $\vec{B}(r) = \mu_0 I \widehat{\phi}/(2\pi r)$. Uma barra condutora de comprimento l se desloca na vizinhança deste fio.



(a) (1,0 ponto) Calcule a força eletromotriz induzida $|\mathcal{E}|$ entre as extremidades da barra quando a barra se desloca com velocidade $\vec{v}$ perpendicular ao fio (figura da esquerda).

(b) (1,5 ponto) Calcule a força eletromotriz induzida $|\mathcal{E}|$ entre as extremidades da barra quando a barra se desloca com velocidade $\vec{v}$ paralela ao fio (figura da direita).

Solução da questão 3

(a) Velocidade perpendicular ao fio

$$|\mathcal{E}| = \left|\int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}\right| = \int\limits_{-l/2}^{l/2} vBdy = vB\ell \Longrightarrow \boxed{|\mathcal{E}| = v\,\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,\ell,}$$

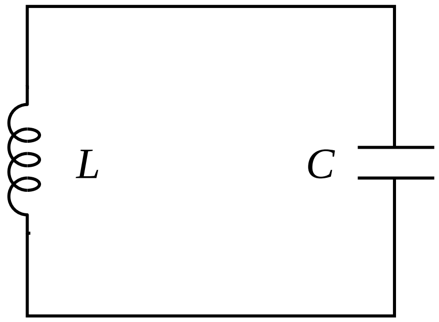
onde x é a coordenada da barra que varia com o tempo.

(b) Velocidade paralela ao fio

$$|\mathcal{E}| = \left|\int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}\right| = \int\limits_{d}^{d+l} \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\frac{dx}{x} \Longrightarrow \boxed{|\mathcal{E}| = \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\log\left(\frac{d+l}{l}\right).}$$

Questão 4

Um circuito LC é formado por uma capacitância C ligada em série a uma indutância L, conforme a figura.



No instante $t = 0$ a corrente I atingiu seu valor máximo I_m e o capacitor começa a carregar ($Q(0) = 0$).

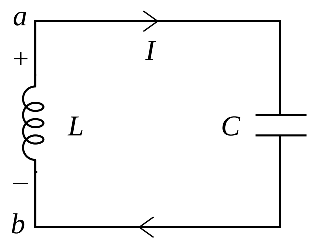
(a) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga $Q(t)$ no capacitor.

(b) (1,5 ponto) Resolva a equação diferencial do item (a) e determine $Q(t)$ e $I(t)$.

(c) (0,5 ponto) Qual é a energia total do sistema?

Solução da questão 4

(a) A ddp no indutor é igual à ddp no capacitor. Como a corrente começa a diminuir, $V_a > V_b$ nas extremidades do indutor, conforme a figura.



$$\boxed{-L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}}$$

(b) Substituindo I por dQ/dt na equação do item (a) obtemos

$$\boxed{-L\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{Q}{C}}$$

$$\Longrightarrow Q(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad I(t) = \frac{dI}{dt} = -A\omega \mathrm{sen}(\omega t + \phi), \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Impondo as condições $Q(0) = 0$ e $I(0) = I_m$ obtemos

$$\left.\begin{array}{l} A\cos\phi = 0 \\ -A\omega \mathrm{sen}\phi = I_m > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi = -\pi/2 \quad \text{e} \quad A = I_m/\omega$$

$$\boxed{Q(t) = \frac{I_m}{\omega}\mathrm{sen}(\omega t) \quad \text{e} \quad I(t) = I_m\cos(\omega t)}$$

(c) Como a energia se conserva, podemos calculá-la em $t = 0$. Neste instante toda a energia está acumulada no indutor e vale

$$\boxed{E = \frac{1}{2}LI_m^2}$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I, \quad I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A},$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad d\mathcal{E} = (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell},$$

$$\Phi^{total} = N\phi^{espira} = LI, \quad \Phi^{total}_{21} = N_2\phi^{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad V = RI, \quad P = RI^2, \quad P = VI,$$