PS

Física III

Escola Politécnica - 2009

FGE 2203 - GABARITO DA PS

2 de julho de 2009

Questão 1

Uma distribuição de cargas, esfericamente simétrica, tem densidade volumétrica

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 - \dfrac{r}{R}\right) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}.$$

onde ρ_0 é uma constante positiva.

(a) (0,5 ponto) Calcule a carga total da distribuição.

(b) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico para $r < R$ e $r > R$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a distância r_m onde o campo elétrico atinge o seu valor máximo e determine o valor do campo para $r = r_m$.

Solução da questão 1

(a) A carga contida em uma região esférica de raio r é

$$Q(r) = \int \rho(r)dv = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \,\mathrm{sen}(\theta) \int_0^{r} d\bar{r}\, \bar{r}^2 \rho(\bar{r})$$
$$= 4\pi\rho_0 \int_0^{r} \left(\bar{r}^2 - \frac{\bar{r}^3}{R}\right) = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)$$

A carga total é obtida fazendo $r = R$,

$$\boxed{Q(R) = \frac{\pi}{3}\rho_0 R^3.}$$

(b) Lei de Gauss (volume $\mathcal{V}$ delimitado por uma superfície de área $\mathcal{A}$):

$$\oint_{\mathcal{A}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho dv.$$

Para $r < R$, usando a simetria esférica, teremos

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q(r).$$

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2}\left[4\pi\rho_0\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right)\right] \Longleftrightarrow \boxed{E_r = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{3}{4}\frac{r^2}{R}\right)}$$

Para $r > R$,

$$E_r = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2} Q(R) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{1}{4\pi r^2}\frac{\pi}{3}\rho_0 R^3 \Longleftrightarrow \boxed{E_r = \frac{\rho_0}{12\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}.}$$

(c) A distância r_m para a qual E_r é máximo é obtida através da equação

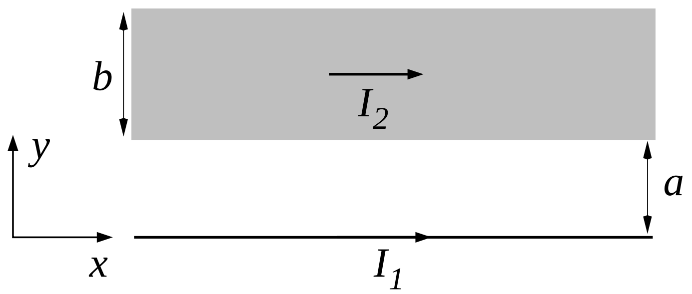
$$\frac{d}{dr}\left(r - \frac{3}{4}\frac{r^2}{R}\right) = 0; \qquad \frac{d^2}{dr^2}\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{3}{4}\frac{r^2}{R}\right) = -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} < 0 \ \text{(máximo)}.$$

$$1 - \frac{3r}{2R} = 0 \qquad r_m = \frac{2R}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E_r(r_m) \equiv E_{max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0}.}$$

Questão 2

A figura abaixo mostra trechos de um fio condutor reto e de uma fita condutora. Tanto o fio quanto a fita podem ser considerados infinitos ao longo da direção x. A fita possui largura é b e sua espessura pode ser desconsiderada. Correntes I_1 e I_2 percorrem o fio e a fita, respectivamente. A densidade linear de corrente na fita é uniforme ($\vec{J} = I_2/b\,\hat{x}$).



(a) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}_{fio}$ produzido pelo fio.

(b) (1,5 ponto) Calcule a força por unidade de comprimento entre o fio e a fita.

Sugestão: Calcule antes a força por unidade de comprimento que $\vec{B}_{fio}$ produz em um "fio" de comprimento L e corrente $dI = Jdy$.

Solução da questão 2

(a) Lei de Ampère (superfície aberta Σ cuja borda é a curva fechada Γ)

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_\Sigma \vec{J}\cdot\vec{A} = \mu_0 I_{int}.$$

Usando a simetria cilíndrica

$$B_\phi 2\pi r = \mu_0 I_1.$$

Logo,

$$\boxed{\vec{B}_{fio} = B_\phi \widehat{\phi} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\widehat{\phi},}$$

onde $\widehat{\phi}$ é tangencial a circunferências com centro no eixo do fio e possui o sentido dado pela regra da mão direita (polegar no sentido da corrente).

(b) No plano da fita (plano xy) o campo do fio é (tomando a origem de y no fio).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}\widehat{z}.$$

A força magnética sobre um fio de largura dy e comprimento L é

$$d\vec{F} = (Jdy)\vec{L}\times\vec{B} = \frac{I_2}{b}L\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}dy\ \widehat{x}\times\widehat{z} = -\frac{I_2}{b}L\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}dy\ \widehat{y}$$

Integrando em y

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\int_a^{a+b}\frac{dy}{y}\,\widehat{y} \Longrightarrow \boxed{\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\log\frac{a+b}{a}\,\widehat{y}.}$$

Questão 3

Uma corrente I percorre as espiras de um solenoide muito longo de raio R. O solenoide possui n espiras por unidade de comprimento.

(a) (1,0 ponto) Calcule a auto-indutância por unidade de comprimento $\mathcal{L} = L/l$.

(b) (0,5 ponto) Calcule a energia magnética armazenada em um pequeno trecho de comprimento l, bem distante das extremidades do solenoide.

(c) (1,0 ponto) Um outro solenoide, de raio $r < R$ e de comprimento l, é colocado no interior do solenoide maior (distante das extremidades), de tal forma que os eixos dos dois solenoides coincidem. O solenoide menor possui n_2 espiras por unidade de comprimento. Supondo que uma corrente I_2 esteja percorrendo o solenoide menor, calcule o fluxo do campo magnético, produzido pelo solenoide menor, no solenoide maior. **Sugestão**: considere antes o coeficiente de indutância mútua.

Solução da questão 3

(a) O campo magnético no interior do solenoide é

$$B = \mu_0 \, n \, I,$$

paralelo ao eixo.

O fluxo de $\vec{B}$ através de $N = n\,l$ espiras é

$$\phi = B\,\pi R^2\,(nl) = (\mu_0\,n\,I)\pi R^2\,(nl) = \mu_0\,n^2\,\pi R^2\,l\,I \equiv \mathcal{L}\,l\,I$$

Portanto, a auto-indutância por unidade de comprimento é

$$\boxed{\mathcal{L} = \pi\,\mu_0\,n^2\,R^2.}$$

(b) Usando a densidade de energia magnética $u_m = 1/(2\mu_0)B^2$, teremos

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2\,(\pi R^2\,l) = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0\,n\,I)^2\,(\pi R^2\,l) \Longleftrightarrow \boxed{U_m = \frac{\pi}{2}\mu_0\,n^2\,R^2\,l\,I^2.}$$

Poderíamos também ter usado o resultado do item (a) juntamente com

$$\boxed{U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mathcal{L}lI^2.}$$

(c) Sabemos que os fluxos através do solenoide maior e do solenoide menor são, respectivamente

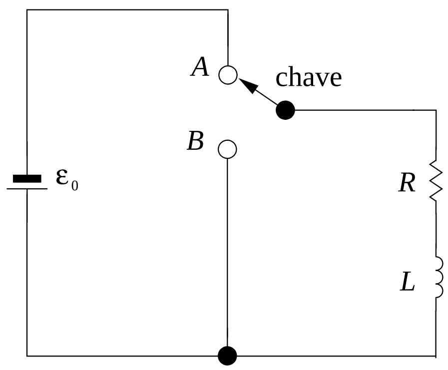
$$\phi_1 = MI_2 \quad \text{e} \quad \phi_2 = MI.$$

Portanto,

$$\phi_1 = \phi_2\frac{I_2}{I} = (\mu_0\,n\,I)(\pi r^2\,n_2\,l)\frac{I_2}{I} \Longleftrightarrow \boxed{\phi_1 = \pi\,\mu_0\,n\,n_2\,r^2\,lI_2.}$$

Questão 4

Suponha que o circuito abaixo ficou durante um tempo muito longo com a chave na posição A. No instante $t = 0$, a chave é posicionada em B.



(a) (0,5 ponto) Qual é a corrente I_0 em $t = 0$?

(b) (0,5 ponto) Obtenha a equação diferencial para a corrente $I(t)$ para $t > 0$.

(c) (1,0 ponto) Determine $I(t)$ para $t > 0$.

(d) (0,5 ponto) Mostre que a energia total dissipada no resistor

$$\int_0^\infty RI(t)^2 dt$$

é igual a energia inicialmente armazenada no indutor.

Solução da Questão 4

(a) A corrente estacionária é

$$\boxed{I_0 = \frac{\epsilon_0}{R}.}$$

(b) Para $t > 0$, temos um circuito RL sem bateria.

$$\boxed{RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = 0}$$

(c) A solução da equação diferencial para o circuito é dada por

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}I(t); \quad \tau \equiv \frac{L}{R}; \quad I(0) \equiv I_0 = \frac{\epsilon_0}{R}.$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{\tau}dt \Longrightarrow \log(I) = -\frac{1}{\tau}t + const.$$

$$\Longrightarrow I(t) = e^{-t/\tau + const.}.$$

$$I(0) = e^{const.} = I_0.$$

$$\Longrightarrow \boxed{I(t) = I_0\, e^{-t/\tau}.}$$

(d) A energia que foi dissipada no resistor é

$$\int_0^\infty RI(t)^2 dt = R(I_0)^2 \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = R(I_0)^2 \left(-\frac{\tau}{2}\right) e^{-2t/\tau}\Big|_0^\infty = R(I_0)^2 \left(-\frac{\tau}{2}\right)(0-1)$$

$$= R(I_0)^2 \frac{L}{2R} = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

Formulário

$$\Phi_e = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V_B - V_A = -\int\limits_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$

$$C = \frac{|Q|}{|V|}, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$

$$dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1+\chi_m)\mu_0 \equiv K_m\mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi^{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi^{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$