P1

Física III - 4320203

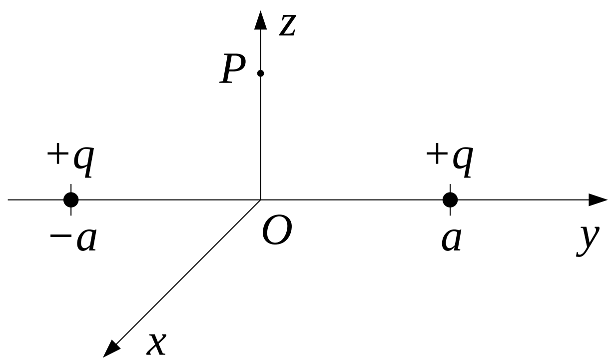
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P1

8 de abril de 2010

Questão 1

Duas partículas puntiformes carregadas com a mesma carga q positiva, fixas sobre o eixo dos y, estão localizadas simetricamente em relação à origem, uma em $y = a$ e a outra em $y = -a$.



(a) (1,0 ponto) Determine o potencial eletrostático $V(x, y, z)$ num ponto qualquer do espaço.

(b) (1,0 ponto) Suponha que uma partícula com carga $-Q$ seja abandonada do repouso no ponto $P = (0, 0, h)$ com $h > 0$. Determine a energia cinética da carga $-Q$ quando ela passar pela origem $O = (0, 0, 0)$ do sistema de coordenadas (despreze a força peso).

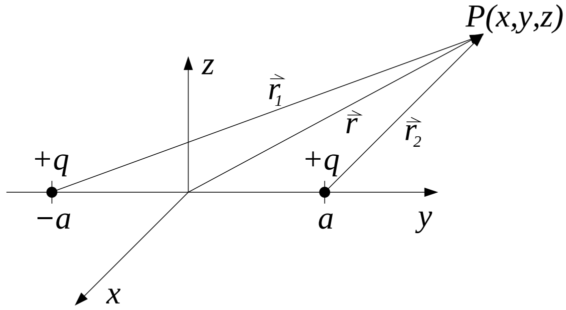
(c) (0,5 ponto) Calcule a energia potencial U_P do sistema formado pelas três cargas na configuração em que a carga $-Q$ está no ponto $P = (0, 0, h)$ e na configuração em que a carga $-Q$ está na origem $O = (0, 0, 0)$. O resultado é compatível com o obtido no item (b)?

Solução da questão 1

(a) O potencial é a soma dos potenciais das duas cargas $+q$.

$$V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right] \ ,$$

onde os vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são mostrados no gráfico abaixo.



$$\vec{r}_1 = \vec{r} + a\vec{\jmath} = x\vec{\imath} + (y+a)\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r} - a\vec{\jmath} = x\vec{\imath} + (y-a)\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+z^2}}\right]}$$

(b) A energia total da carga $-Q$ se conserva: $U(0,0,h) = U(0,0,0) + E_{cin}(0,0,0)$, onde $U = -QV$.

$$\frac{-Q\,q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right] = \frac{-Q\,q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a}\right] + E_{cin}(0,0,0) \Longrightarrow \boxed{E_{cin} = \frac{Q\,q}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}\right]}$$

(c) A energia de uma configuração é obtida somando-se sobre a energia potencial dos pares de cargas.

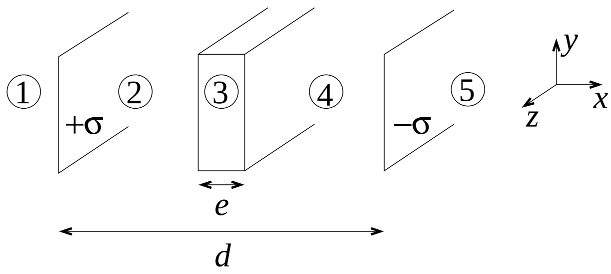
Carga $-Q$ em $(0,0,h)$: $\quad E_P = -\dfrac{2Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} + \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{2a} = -\dfrac{Q\,q}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} + \dfrac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a}$

Carga $-Q$ em $(0,0,0)$: $\quad E_O = -\dfrac{2Q\,q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a} + \dfrac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{2a} = -\dfrac{Q\,q}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a} + \dfrac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{a}$

Observe que $E_P - E_O$ é igual à energia cinética calculada no item (b). Portanto, os resultados são compatíveis.

Questão 2

Considere duas placas grandes, paralelas, a uma distância d uma da outra, uma delas com densidade superficial de carga $\sigma > 0$, uniforme, e o outra com densidade $-\sigma$. Entre as duas placas paralelas é colocada uma chapa metálica de espessura $e < d$, conforme mostra a figura.



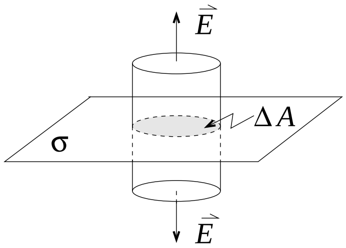
(a) (0,5 ponto) Demonstre que a intensidade do campo elétrico criado por um plano infinito com densidade superficial de carga σ é $E = \sigma/(2\epsilon_0)$.

(b) (1,0 ponto) Utilizando o princípio de superposição e desprezando efeitos de borda, determine o <u>vetor</u> campo elétrico nas regiões 1,2,3,4 e 5.

(c) (1,0 ponto) Se a chapa metálica for retirada da região entre as placas, haverá aumento ou diminuição da energia eletrostática do sistema? Justifique a resposta.

Solução da questão 2

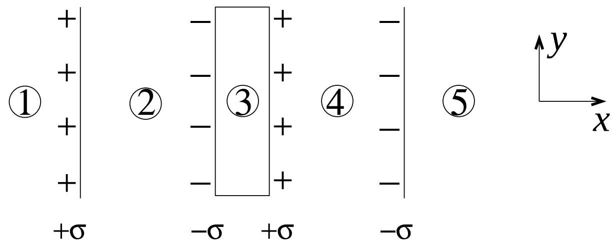
(a) Usando a lei de Gauss e tomando a superfície cilíndrica S mostrada na figura obtemos



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 2E\Delta A = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma\Delta A}{\epsilon_0}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

(b) O campo no interior da chapa metálica é nulo. Para isto, as densidades de carga induzidas na superfícies da chapa pelas placas carregadas devem ser iguais a σ e $-\sigma$, como mostra a figura abaixo.



Definimos $\vec{E}_i^+$, $\vec{I}_i^-$, $\vec{I}_i^+$ e $\vec{E}_i^-$ os campos produzidos na região i ($i = 1,2,3,4$ e 5) respectivamente pela placa positiva, pela carga negativa induzida na chapa, pela carga positiva induzida na chapa, e pela placa negativa. O campo total em cada região é dado por

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^+ + \vec{I}_1^- + \vec{I}_1^+ + \vec{E}_1^- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \vec{0}$$
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2^+ + \vec{I}_2^- + \vec{I}_2^+ + \vec{E}_2^- = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\imath}$$
$$\vec{E}_3 = \vec{E}_3^+ + \vec{I}_3^- + \vec{I}_3^+ + \vec{E}_3^- = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \vec{0}$$
$$\vec{E}_4 = \vec{E}_4^+ + \vec{I}_4^- + \vec{I}_4^+ + \vec{E}_4^- = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{\imath}$$
$$\vec{E}_5 = \vec{E}_5^+ + \vec{I}_5^- + \vec{I}_5^+ + \vec{E}_5^- = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \vec{0}$$

(c) A energia eletrostática U aumenta pois há um aumento do volume entre as placas onde o campo é diferente de zero.

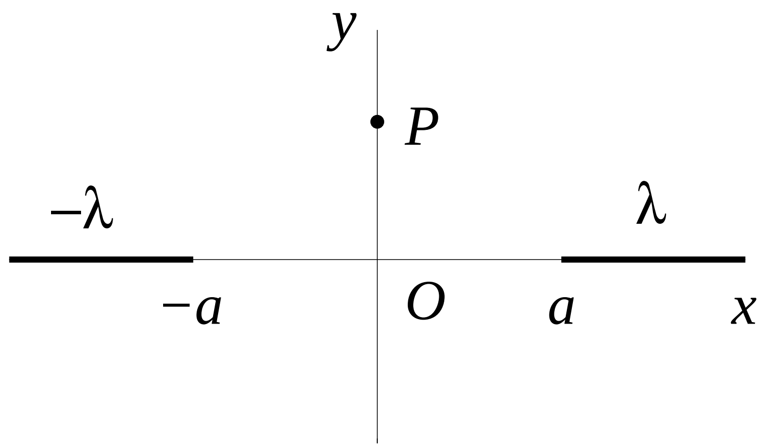
$$U = u \times \text{Volume} = \frac{\epsilon_0\, E^2}{2} \times \text{Volume}\ .$$

Questão 3

A densidade linear de carga ao longo do eixo x é dada por

$$\lambda(x) = \begin{cases} -\lambda, & \text{se } x < -a, \\ \lambda, & \text{se } x > a, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ e $a > 0$ são constantes.



(a) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ num ponto P sobre o eixo y.

(b) (1,0 ponto) Adotando-se potencial nulo na origem O, calcule o potencial num ponto P sobre o eixo y.

(c) (0,5 ponto) Considere os pontos $O = (0, 0, 0)$, $A = (a/2, 0, 0)$ e $P = (0, a, 0)$. Qual é o trabalho efetuado pela força elétrica para levar uma carga q ao longo do percurso fechado $OAPO$?

Solução da questão 3

(a) O campo elétrico é

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\vec{r}}{r^3}dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{-\infty}^{-a}\frac{-x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}}{(x^2+y^2)^{3/2}}(-\lambda dx) + \int_a^{\infty}\frac{-x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}}{(x^2+y^2)^{3/2}}(\lambda dx)\right] \\ &= -\frac{\lambda\vec{\imath}}{2\pi\epsilon_0}\int_a^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\vec{\imath}.\end{aligned}$$

(b) O potencial em P é

$$V = -\int_O^P \vec{E}\cdot d\vec{l}.$$

Como a integral independe do caminho, podemos tomá-lo ao longo do eixo y. Logo,

$$V = -\int_0^y \vec{E}\cdot(\vec{\jmath}dy) = 0.$$

(c) Como a força eletrostática é conservativa, o trabalho para levar uma carga ao longo de um caminho que começa e termina no mesmo ponto é zero.

Questão 4

O potencial elétrico devido a uma esfera carregada de raio a é

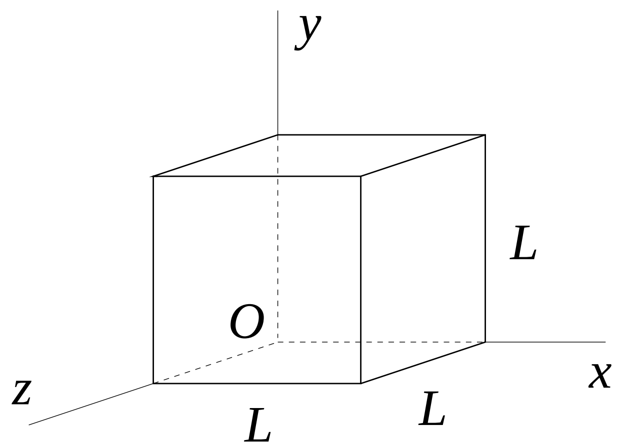
$$V(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{V_0\, a}{r}, & \text{se } r \geq a, \\ \\ 2V_0 - \dfrac{V_0\, r}{a}, & \text{se } r < a, \end{cases}$$

onde $V_0 > 0$ é constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância ao centro da esfera.

(a) (1,0 ponto) Determine o campo elétrico $\vec{E}$ para $r > a$ e $r < a$.

(b) (1,0 ponto) Determine a carga total Q da esfera.

(c) (0,5 pontos) Calcule o fluxo através da face superior do cubo de lados $L > a$ mostrado na figura que tem três arestas ao longo dos eixos x, y e z. Expresse o resultado em termos da carga total Q da esfera e de ϵ_0.



Solução da questão 4

(a) O campo elétrico é

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\widehat{r} = \begin{cases} \dfrac{V_0 a}{r^2}\widehat{r}, & \text{se } r > a, \\ \\ \dfrac{V_0}{a}\widehat{r}, & \text{se } r < a. \end{cases}$$

(b) Tomando-se uma superfície gaussiana esférica de raio $r > a$, obtemos a carga total

$$Q = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \left(\frac{V_0 a}{r^2}\right)(4\pi r^2) = 4\pi\epsilon_0 a V_0.$$

(c) A carga total no interior do cubo é $Q/8$. Pela lei de Gauss, o fluxo total através do cubo é

$$\Phi_{cubo} = \frac{Q/8}{\epsilon_0} = \frac{Q}{8\epsilon_0}.$$

Devido à simetria esférica, o campo é radial dentro e fora da esfera. Assim, o fluxo é nulo nas faces que cortam a esfera (os elementos de área $d\vec{A}$ destas faces são perpendiculares a $\widehat{r}$) e é o mesmo para as três faces restantes. Portanto, o fluxo através da face superior é

$$\Phi = \frac{1}{3}\Phi_{cubo} = \frac{Q}{24\epsilon_0}.$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int\vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad U = qV, \quad C = Q/V,$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}\,.$$