P2

Física III - 4320203

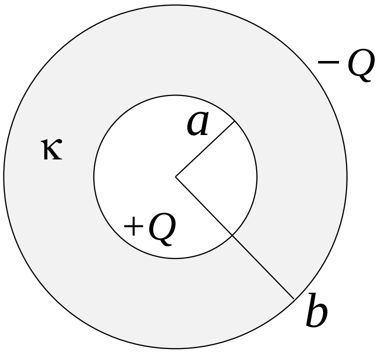
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P2

13 de maio de 2010

Questão 1

Considere um capacitor esférico formado por um condutor interno de raio a e um condutor externo de raio b, conforme a figura. O espaço entre os condutores é preenchido com material de constante dielétrica κ.



Carrega-se o condutor interno com carga $+Q$ e o externo com carga $-Q$ (cargas livres). O campo elétrico devido apenas a essas cargas livres é

$$\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}\ ,$$

onde r é a distância ao centro do capacitor esférico.

(a) (0,5 ponto) Escreva a expressão do <u>vetor</u> campo elétrico dentro do dielétrico ($a < r < b$).

(b) (1,0 ponto) Calcule a energia U_0 armazenada no capacitor na ausência de dielétrico (em função de a, b, Q e ϵ_0), e a energia U na presença do dielétrico (em função de a, b, Q, ϵ_0 e κ).

(c) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo elétrico $\vec{E}_i$ devido somente às cargas induzidas (ligadas) no dielétrico.

Solução da questão 1

(a) O campo elétrico na região com dielétrico é

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\kappa} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\kappa r^2}\,\hat{r}$$

(b) A energia armazenada no capacitor sem o dielétrico é

$$U_0 = \frac{Q|V_0|}{2}\,, \quad \text{onde} \quad V_0 = -\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\,.$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}\,.$$

Quando colocamos o dielétrico, a ddp é reduzida de um fator κ. Como a carga não se altera,

$$\boxed{U = \frac{QV}{2} = \frac{QV_0}{2\kappa} = \frac{U_0}{\kappa}}\,.$$

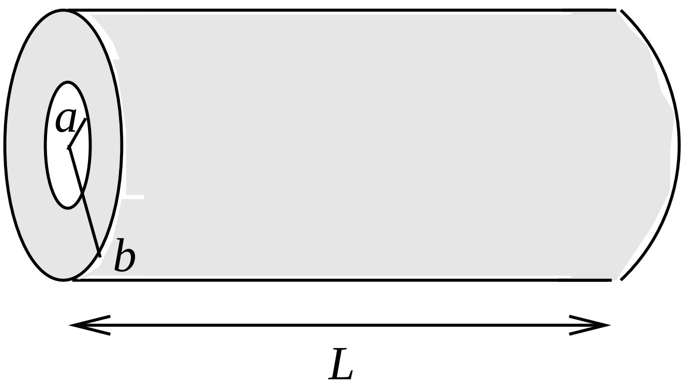
(c) O campo $\vec{E}_i$ devido às cargas de polarização satisfaz

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \Longrightarrow \vec{E}_i = \vec{E} - \vec{E}_0 \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_i = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\hat{r}}\,.$$

O campo $\vec{E}_i = \vec{0}$ fora da região entre os condutores.

Questão 2

Um resistor com resistividade ρ, tem a forma de um cilindro oco de comprimento L e raios a e b. Calcule a resistência R e o módulo do vetor densidade de corrente $\vec{J}$ no interior do resistor nos casos em que uma diferença de potencial V é aplicada:



(a) (1,0 ponto) entre as bases do cilindro;

(b) (1,5 ponto) entre as superfície interna de raio a e a externa de raio b.

Solução da questão 2

(a) Usando a expressão $R = \rho L/A$, obtemos para a resistência entre as bases do cilindro a expressão

$$\boxed{R = \frac{\rho L}{\pi(b^2 - a^2)}} .$$

A densidade de corrente J é

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = \frac{V}{R}\frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{V}{\rho L}} .$$

(b) Primeiramente dividimos o resistor em cascas cilíndricas coaxiais de espessura dr. A resistência de uma casca de raio r é

$$dR = \rho\frac{dr}{A(r)} = \rho\frac{dr}{2\pi r L} .$$

A resistência total na direção radial é a soma (integral) das resistências de cada uma destas cascas:

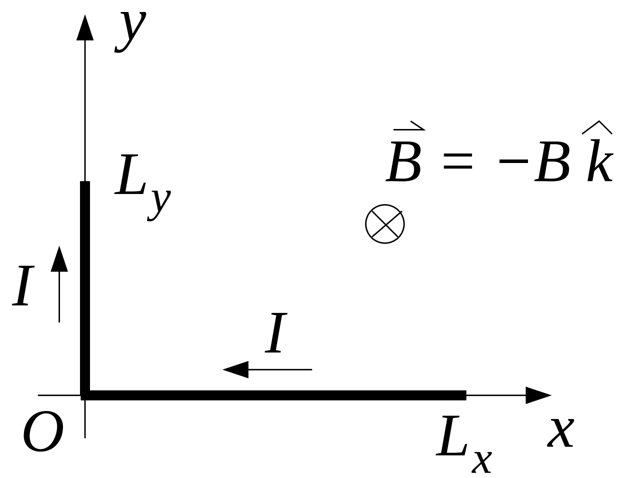
$$\boxed{R = \rho\int_a^b \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} .$$

A densidade de corrente neste caso depende de r

$$\boxed{J(r) = \frac{I}{A(r)} = \frac{V}{RA(r)} = \frac{V}{\rho r \ln(b/a)}} .$$

Questão 3

Um condutor formado por dois segmentos condutores retilíneos ortogonais de comprimentos L_x e L_y é percorrido por uma corrente constante I (veja a figura).



Um campo magnético constante $\vec{B}$ uniforme é aplicado perpendicularmente ao plano xy para dentro da figura.

(a) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> força exercida por B sobre o trecho L_x ?

(b) (1,0 ponto) Calcule o <u>vetor</u> força exercida por B sobre o trecho L_y ?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 3}}$

A força sobre um segmento infinitesimal de fio $d\vec{\ell}$ num campo magnético $\vec{B}$ é dada por

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B} \ .$$

(a) Força F_x sobre o segmento L_x

$$\underline{\text{eixo x}} \quad \begin{cases} d\vec{\ell} = -dx\,\hat{\imath} \\ \vec{B} = -B\,\hat{k} \end{cases} \Longrightarrow d\vec{F}_x = IdxB(\hat{\imath} \times \hat{k}) = -IBdx\,\hat{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{F}_x = -IB \int_0^{L_x} dx\,\hat{\jmath} = -IBL_x\,\hat{\jmath}} \ .$$

(b) Força F_y sobre o segmento L_y

$$\underline{\text{eixo y}} \quad \begin{cases} d\vec{\ell} = dy\,\hat{\jmath} \\ \vec{B} = -B\,\hat{k} \end{cases} \Longrightarrow d\vec{F}_y = -IdyB(\hat{\jmath} \times \hat{k}) = -IBdy\,\hat{\imath}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{F}_y = -IB \int_0^{L_y} dy\,\hat{\imath} = -IBL_y\,\hat{\imath}} \ .$$

Questão 4

Um fio condutor na figura abaixo conduz uma corrente I no sentido indicado. Para $x \geq R$ e $y \geq R$ os trechos são retilíneos e estão ao longo de x e y, respectivamente (fios semi-infinitos). Para x e y menores do que R, o condutor forma um quarto de círculo com raio R, conforme a figura 1.

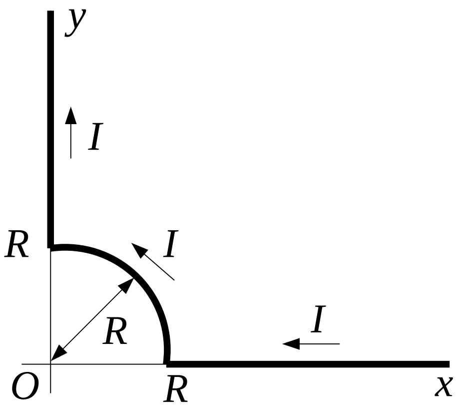


FIG. 1

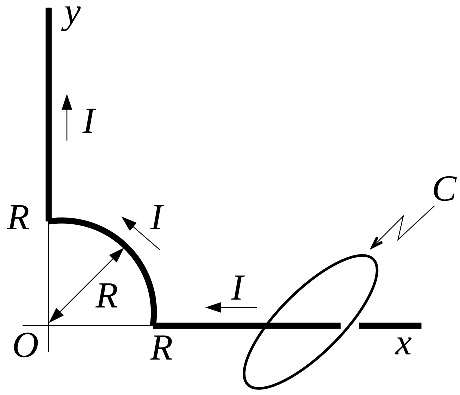


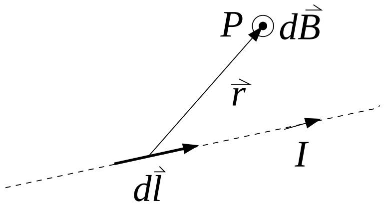
FIG. 2

(a) (1,0 ponto) Quais são os campos $\vec{B}$ no ponto O devido ao segmentos retilíneos do fio ?

(b) (1,0 ponto) Qual é o campo $\vec{B}$ no ponto O devido ao segmento circular ?

(c) (1,0 ponto) Determine o valor da integral de linha do vetor $\vec{B}$ ao longo do percurso circular fechado C não coplanar com os fios e centrado no eixo x, conforme a figura 2.

Solução da questão 4 O campo produzido por segmento $d\vec{\ell}$ do fio num ponto P é dado por



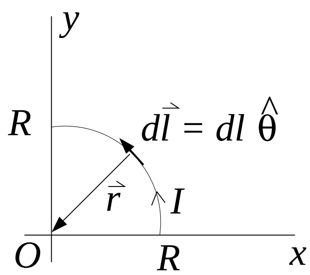
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}\ .$$

(a) Campos devidos aos trechos retilíneos do fio.

Trecho no eixo x $\left\{ d\vec{\ell} = -dx\,\hat{\imath} \quad \text{e} \quad \hat{r} = \hat{\imath} \Longrightarrow \boxed{\vec{B}_x = \vec{0}}\ .\right.$

Trecho no eixo y $\left\{ d\vec{\ell} = dy\,\hat{\jmath} \quad \text{e} \quad \hat{r} = -\hat{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\vec{B}_y = \vec{0}}\ .\right.$

(b) Campo devido aos trecho circular do fio (1/4 de circulo).



Como $d\vec{\ell} \perp \hat{r}$ e $r^2 = R^2$, podemos escrever

$$\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{d\ell}{R^2}\,\hat{k}\ .$$

$$\therefore \quad \boxed{\vec{B}_{\odot} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int_{\odot} d\ell\,\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{8R}\,\hat{k}}\ .$$

(c) A integral de linha do vetor $\vec{B}$ pode ser calculada através da lei de Ampère:

$$\boxed{\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I}\ .$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E}-Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$