P3

Física III - 4320301

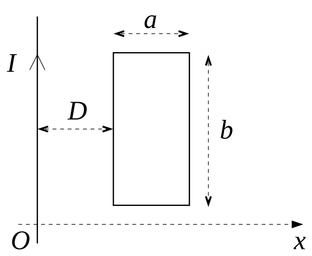
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P3

24 de junho de 2010

Questão 1

Considere um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária I. Coplanar com o fio está uma espira retangular de lados a e b e resistência R. A distância da espira ao fio infinito é D, conforme a figura.



Dado: O módulo do campo magnético produzido por um fio infinito num ponto P a uma distância r do fio é $B = \mu_0 I/(2\pi r)$.

(a) (0,5 ponto) Calcule o fluxo do campo magnético sobre a área da espira.

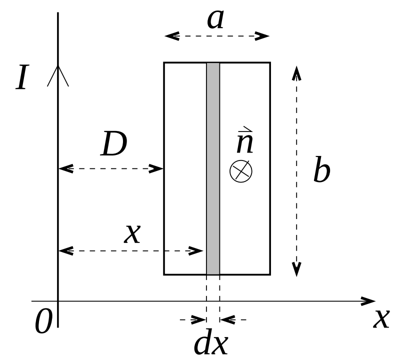
(b) (0,5 ponto) Calcule a mútua indutância do sistema fio-espira.

(c) (0,5 ponto) Suponha que a espira é deslocada com velocidade $\vec{v}$ constante paralelamente ao fio. Calcule o valor da corrente na espira.

(d) (1,0 ponto) Suponha que a espira é afastada do fio com velocidade $\vec{v}$ na direção perpendicular a esse fio. Calcule a força eletromotriz induzida e a corrente na espira no instante em que a distância da espira ao fio é x. Determine o sentido da corrente induzida (horário ou anti-horário), justificando sua resposta.

Solução da questão 1

(a) Fluxo do campo magnético sobre a espira.



Escolhemos a normal $\vec{n}$ da área da espira entrando no plano da figura. Assim, $\vec{B}$ e $d\vec{A} = b\,dx\,\vec{n}$ são paralelos e

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int_S B\,dA = \int_D^{D+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx\,,$$

$$\Longrightarrow \boxed{\Phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{D+a}{D}\right)}.$$

(b) A mútua indutância é

$$\boxed{M = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(\frac{D+a}{D}\right)}.$$

(c) Quando o deslocamento é paralelo ao fio não há variação de fluxo, logo

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 0} \Longrightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = 0}.$$

(d) Denominando x a coordenada do lado esquerdo da espira, ao invés de D, o resultado do item (a) pode ser reescrito como

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{x+a}{x}\right) = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left[\ln(x+a) - \ln x\right].$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\left[\frac{1}{x+a}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dt}\right]$$

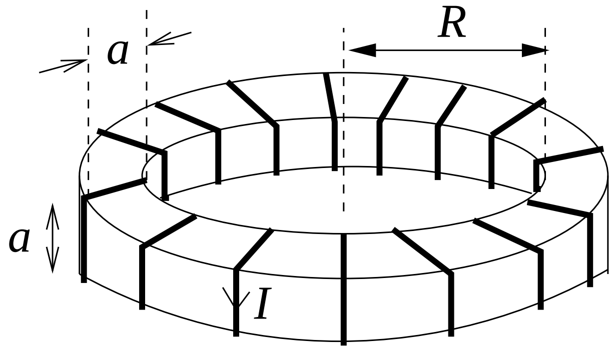
A velocidade da espira $v = dx/dt$. Portanto,

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I a b v}{2\pi x(x+a)}}.$$

A corrente induzida $\boxed{I_{ind} = \mathcal{E}/R}$ e o sentido da corrente é o horário pois o fluxo diminui com o afastamento da espira.

Questão 2

Uma bobina toroidal de raio interno R e seção reta quadrada de lado a, com $a << R$, possui N espiras percorridas por uma corrente I.



(a) (0,5 ponto) Calcule o <u>vetor</u> campo magnético no interior do toróide.

(b) (1,0 ponto) Calcule a auto-indutância da bobina supondo que o módulo do campo magnético seja aproximadamente constante dentro da bobina.

(c) (1,0 ponto) Suponha que a bobina toroidal seja preenchida com um núcleo de um material magnético com permeabilidade magnética relativa $K_m \equiv \mu/\mu_0 = 500$. Calcule os novos valores do <u>vetor</u> campo magnético no seu interior e da auto-indutância.

Solução da questão 2

(a) Usamos a lei de Ampère $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_t$, onde $I_t = NI$ e o percurso C é um círculo de raio r com centro no eixo da bobina e perpendicular a este eixo. Por simetria $\vec{B} = B(r)\widehat{e}_\varphi$ e $d\vec{\ell} = d\ell\widehat{e}_\varphi$, logo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \oint_C d\ell = B(r)2\pi r = \mu_0 NI$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\widehat{e}_\varphi}.$$

(b) Usando a condição $a << R$, o campo no interior do toróide pode ser escrito como

$$\vec{B}_0 \approx \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\widehat{e}_\varphi \, ,$$

logo o fluxo em cada espira do toróide será

$$\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\, a^2 \, .$$

A auto indutância é definida como

$$L = \frac{\Phi_{total}}{I} = \frac{N\phi}{I} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi R}\, a^2}.$$

(c) O campo magnético na presença do material com $\mu = 500\mu_0$ será

$$\vec{B} = \frac{\mu}{\mu_0}\vec{B}_0 = 500\frac{\mu_0 NI}{2\pi R}\widehat{e}_\varphi \, .$$

Assim, o fluxo através de cada espira será multiplicada por 500 e a indutância será

$$\boxed{L = \frac{N\, 500\, \phi}{I} = \frac{500\, \mu_0 N^2 I}{2\pi R}\, a^2}.$$

Questão 3

Um solenóide longo de comprimento L, seção reta circular de raio $a << L$ e com N espiras é percorrido por uma corrente $I = I_0 \cos(\omega t)$. O módulo do campo magnético no interior solenóide é dado por $B = \mu_0 N I / L$.

(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico no interior do solenóide.

(b) (1,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico fora do solenóide.

Solução da questão 3

O campo elétrico é calculado através da lei de Faraday:

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}\,.$$

O problema tem simetria cilíndrica. Escolhendo o eixo do solenóide como sendo o eixo z e com o sentido igual ao do campo magnético, podemos escrever

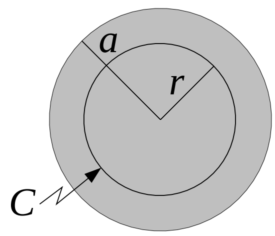
$$\vec{B}(t) = \begin{cases} \mu_o \dfrac{N}{L} I(t)\,\widehat{e}_z & \text{no interior do solenóide} \\ 0 & \text{no exterior do solenóide}\,. \end{cases}$$

Usaremos como percurso C um círculo centrado no eixo do solenóide cujo plano é perpendicular ao eixo. Neste percurso, por simetria, $\vec{E} = E(r)\widehat{e}_\varphi$ e $d\vec{\ell} = d\ell\,\widehat{e}_\varphi$. Portanto,

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(r)\oint_C d\ell = E(r) 2\pi r\,.$$

O resultado acima vale dentro e fora do solenóide.

(a) Campo elétrico dentro do solenóide ($r < a$).

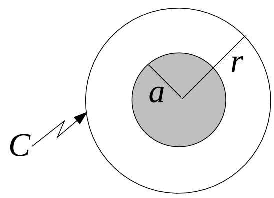


Neste caso o percurso C fica dentro do solenóide $\Rightarrow \Phi = B\pi r^2$. Assim,

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(r)2\pi r = -\mu_o \frac{N}{L}\frac{dI(t)}{dt}\pi r^2$$

$$\Longrightarrow E(r) = -\frac{\mu_o N}{2L}\frac{dI(t)}{dt} r \Longrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\mu_o N \omega I_0 \,\text{sen}(\omega t)\, r}{2L}\,\widehat{e}_\varphi}\,.$$

(b) Campo elétrico fora do solenóide ($r > a$).



Neste caso o percurso C fica fora do solenóide $\Rightarrow \Phi = B\pi a^2$. Assim,

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(r)2\pi r = -\mu_o \frac{N}{L}\frac{dI(t)}{dt}\pi a^2$$

$$\Longrightarrow E(r) = -\frac{\mu_o N}{2Lr}\frac{dI(t)}{dt} a^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\mu_o N \omega I_0 \,\text{sen}(\omega t)\, a^2}{2L\, r}\,\widehat{e}_\varphi}\,.$$

Questão 4

Um solenóide de auto-indutância L é percorrido por uma corrente estacionária I_0.

(a) (0,5 ponto) Qual é o valor da energia magnética armazenada no indutor?

(b) (1,0 ponto) Por meio de um chaveamento, no instante $t = 0$, o indutor é colocado em série com um capacitor de capacitância C de modo a formar um circuito LC. A corrente inicial no indutor é $I(0) = I_0$ e a carga inicial no capacitor é $Q(0) = 0$. Use a lei de conservação de energia para determinar a carga máxima $Q_{máx}$ que pode ser atingida no capacitor.

(c) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para a carga Q do capacitor e determine a frequência angular de oscilação ω.

Solução da questão 4

(a) A energia armazenada no solenóide é

$$\boxed{U_L = \frac{1}{2} L I_0^2}.$$

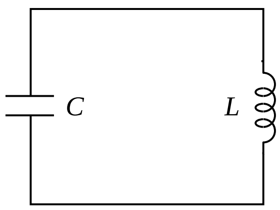
(b) A energia armazenada no capacitor é dada por

$$U_C = \frac{Q^2}{2C}.$$

A carga máxima no capacitor será atingida quando $I = 0$ e toda a energia do sistema estiver armazenada no capacitor. A energia total foi calculada no item (a). Assim,

$$\frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{Q_{máx}^2}{2C} \Longrightarrow \boxed{Q_{máx} = \sqrt{LC}\, I_0}.$$

(c) A equação diferencial do circuito é



$$-L\frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}, \quad \text{ou como} \quad I = \frac{dQ}{dt},$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC}Q}.$$

A frequência de angular de oscilação pode ser obtida diretamente da equação acima:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}},$$

ou através da solução da equação diferencial

$$Q(t) = Q_m \text{sen}(\omega t) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Formulário

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad V = RI, \quad P = RI^2, \quad P = VI,$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I,$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = (1 + \chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 \equiv K_m \mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi^{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2 \phi^{espira} = M_{21} I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$