PR

Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2010

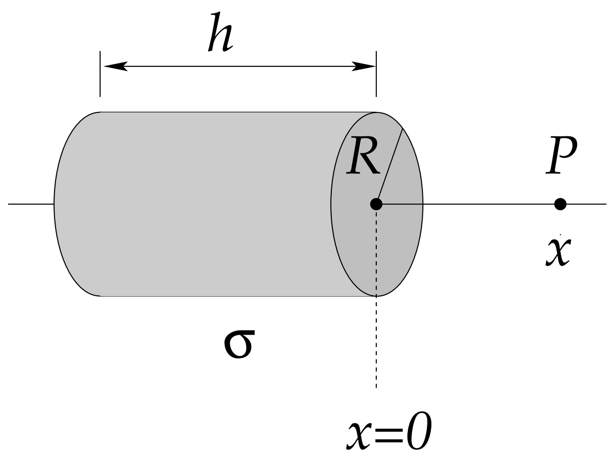
PROVA DE RECUPERAÇÃO

29 de julho de 2010

Questão 1

(a) (1,0 ponto) Uma carga Q está distribuída uniformemente num anel de raio R. Calcule o potencial elétrico V num ponto P do seu eixo a uma distância x do centro.

(b) (1,5 ponto) Uma casca cilíndrica de raio R e altura h está uniformemente carregada com densidade superficial $\sigma > 0$. Calcule o potencial elétrico V num ponto P do seu eixo à coordenada x da extremidade direita. Sugestão: considere a superfície lateral do cilindro como uma superposição de aneis coaxiais com o cilindro.



Dado: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) Como a distância ao ponto P é constante e igual a $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ para todos os elementos de carga

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

(b) Usando o resultado do item (a), o potencial devido à fatia da casca cilíndrica entre x' e $x' + dx'$ é

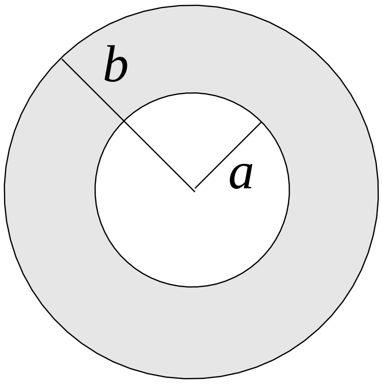
$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{R^2 + (x - x')^2}},$$

onde $dq = (2\pi R dx')\sigma$. Logo,

$$V = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{-h}^{0} \frac{dx'}{\sqrt{R^2 + (x - x')^2}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \ln \left[\frac{x + h + \sqrt{R^2 + (x + h)^2}}{x + \sqrt{R^2 + x^2}} \right].$$

Questão 2

Uma esfera oca, com raios interno e externo a e b, respectivamente, veja a figura abaixo, é feita de um material condutor com resistividade $\rho(r) = Ar^3$, onde A é uma constante e r é a distância medida a partir do centro da esfera.



(a) (0,5 ponto) Qual é a resistência dR de uma camada infinitesimal da esfera entre os raios r e $r + dr$?

(b) (1,0 ponto) Qual é a resistência R_{ab} da esfera entre os raios a e b?

(c) (1,0 ponto) Se entre a e b houver uma diferença de potencial V_{ab}, qual é o <u>vetor</u> densidade de corrente $\vec{J}(r)$ em função da distância r ao centro da esfera?

Solução da questão 2

(a) A resistência dR é dada por

$$dR = \frac{\rho(r)\,dr}{4\pi r^2} = \frac{Ar\,dr}{4\pi}\,.$$

(b) A resistência entre a superfície interna e externa é

$$R_{ab} = \int dR = \frac{A}{4\pi}\int_a^b r dr = \frac{A(b^2 - a^2)}{8\pi}\,.$$

(c) A corrente I entre a superfície interna e a externa é

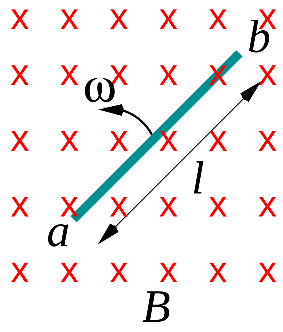
$$I = \frac{V_{ab}}{R_{ab}} = \frac{8\pi V_{ab}}{A(b^2 - a^2)}\,.$$

Pela conservação de carga esta corrente é a mesma através de qualquer superfície esférica concêntrica com a esfera. Portanto,

$$\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\,\widehat{e}_r = \frac{2V_{ab}}{A(b^2 - a^2)r^2}\,\widehat{e}_r\,.$$

Questão 3

A figura abaixo mostra uma haste de comprimento l, girando com velocidade angular constante ω, na presença de um campo magnético externo uniforme, $\vec{B} = -B\hat{z}$ entrando da página. A rotação da haste se dá em torno de um eixo normal à pagina, passando pela extremidade a.

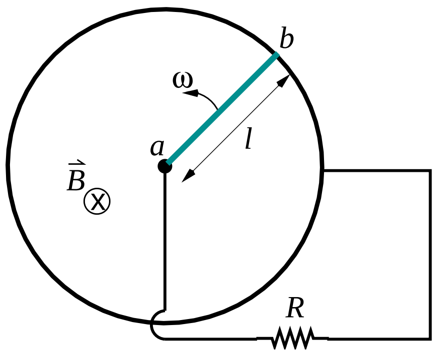


(a) (1,0 ponto) Determine a força magnética exercida sobre um elétron de carga $-e$, situado a uma distância r do ponto a.

(b) (1,0 ponto) Mostre que a força eletromotriz induzida, que é igual à diferença de potencial entre os extremos da barra, é

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} B\omega l^2 \, .$$

(c) (0,5 ponto) Suponha que a haste faça parte de um circuito com resistência R, conforme a figura abaixo.



Obtenha a corrente no resistor indicando o sentido (de a para b ou de b para a).

Solução da questão 3

(a) A velocidade do elétron é $\vec{v}_e = \omega r\hat{\theta}$. Portanto, a força magnética sobre o elétron é

$$\vec{F} = -e\vec{v}_e \times \vec{B} = -e\omega r(-B)(\hat{\theta} \times \hat{z}) = e\omega rB\hat{r}.$$

Ou seja, a força tem sentido de a para b quando $e\omega rB$ é positivo.

(b) No equilíbrio devemos ter $\vec{F} + (-e\vec{E}) = 0$, onde $\vec{E}$ é o campo elétrico estático que se opõe à força magnética $\vec{F}$. Portanto, $\vec{E} = \omega rB\hat{r}$. Logo,

$$\mathcal{E} = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d(r\hat{r}) = \int_a^b \vec{E} \cdot d(r\hat{r}) = \omega B \int_0^l r dr = \frac{1}{2}\omega Bl^2.$$

<u>Ou</u>,

$$\mathcal{E} = \int_b^a (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \omega B \int_0^l r dr = \frac{1}{2}\omega Bl^2.$$

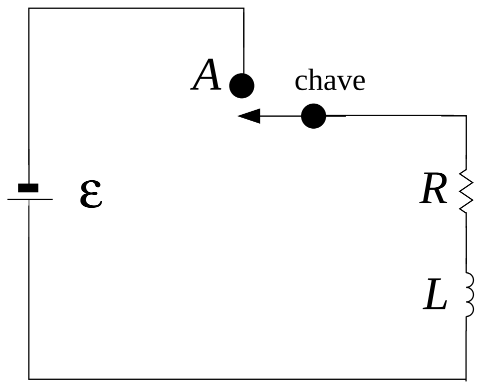
(c) A corrente no resistor é

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{Bl^2\omega}{2R}.$$

A corrente de cargas positivas deve fluir na direção contrária ao movimento dos elétrons, ou seja de b para a.

Questão 4

No instante $t = 0$, a chave do circuito mostrado na figura é posicionada em A.



(a) (0,5 ponto) Qual é a corrente I_0 em $t = 0$?

(b) (0,5 ponto) Obtenha a equação diferencial para a corrente $I(t)$ para $t > 0$.

(c) (1,0 ponto) Determine $I(t)$ para $t > 0$.

(d) (0,5 ponto) Qual é o valor da corrente para tempos muito grandes? Justifique.

Solução da questão 4

(a) A corrente $I_0 = 0$, devido à presença do indutor.

(b) Para $t > 0$, temos um circuito RL com bateria.

$$RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = \mathcal{E}$$

(c) A equação diferencial do circuito pode ser escrita como

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau}(I(t) - \frac{\mathcal{E}}{R}), \quad \text{onde} \quad \tau \equiv \frac{L}{R} \quad \text{e} \quad I(0) = 0.$$

$$\Longrightarrow \frac{dI}{I - \mathcal{E}/R} = -\frac{1}{\tau}dt. \Longrightarrow \log(I - \frac{\mathcal{E}}{R}) = -\frac{t}{\tau} + const.$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} + Ae^{-t/\tau}.$$

$$I(0) = 0 \Longrightarrow A = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}).$$

(d) Tomando o limite $t \longrightarrow \infty$ na solução acima obtemos

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

<u>Outra solução:</u> Quando a corrente atinge o valor estacionário o indutor se comporta como um pedaço de fio e o circuito é equivalente a uma bateria ligada a um resistor. Portanto, $I = \mathcal{E}/R$.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int\vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint\epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_dA, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E}-Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int\vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \mathcal{E} = \int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{\ell},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1,$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}, \quad \mu = \kappa_m\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0.$$