PS

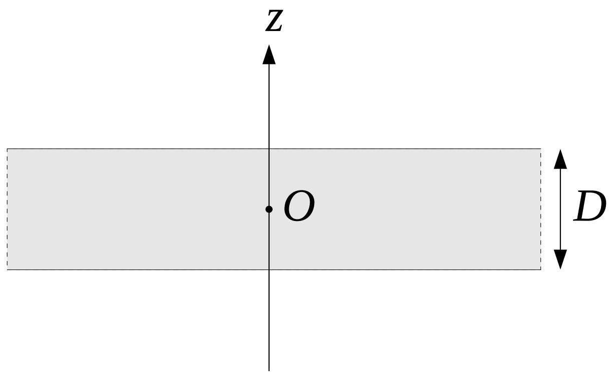
Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA PS

1 de julho de 2010

Questão 1



Na figura, a chapa isolante de espessura D possui densidade de carga elétrica positiva ρ, uniformemente distribuída em seu volume. Supondo a chapa plana e infinita nas direções x e y, calcule o **vetor** campo elétrico

(a) (0,5 ponto) acima da chapa;

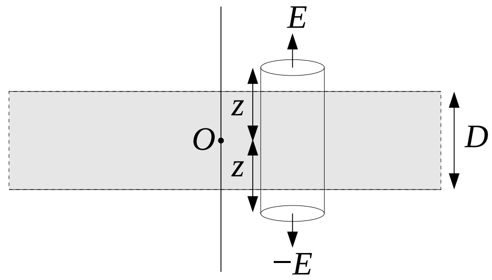
(b) (0,5 ponto) abaixo da chapa;

(c) (1,5 ponto) no interior da chapa, como função da coordenada z.

Utilize o sistema de eixos da figura, com a origem O no plano médio da chapa.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

Por simetria, o campo elétrico em qualquer posição do espaço deve ser paralelo ao eixo z. Como a chapa é positivamente carregada, o campo elétrico deve apontar para cima se $z > 0$ e para baixo se $z < 0$. Vamos aplicar a lei de Gauss fazendo uso de uma superfície cilíndrica S de área de seção reta A e altura $2z$, como ilustrado na figura.



Para os itens (a) e (b), temos $z > D/2$, e a carga interna ao cilindro é $Q_{\text{int}} = \rho D A$. Aplicando a lei de Gauss, segue que

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 2EA = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho D A}{\epsilon_0},$$

e portanto o módulo do campo elétrico é

$$E = \frac{\rho D}{2\epsilon_0}.$$

(a) O vetor campo elétrico acima da chapa é dado por

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho D}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}}.$$

(b) O vetor campo elétrico acima da chapa é dado por

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\rho D}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}}.$$

Para os pontos no interior da chapa, a simetria permanece, mas a carga interna à superfície gaussiana é proporcional à altura do cilindro:

$$2EA = \frac{\rho \cdot 2z \cdot A}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}}.$$

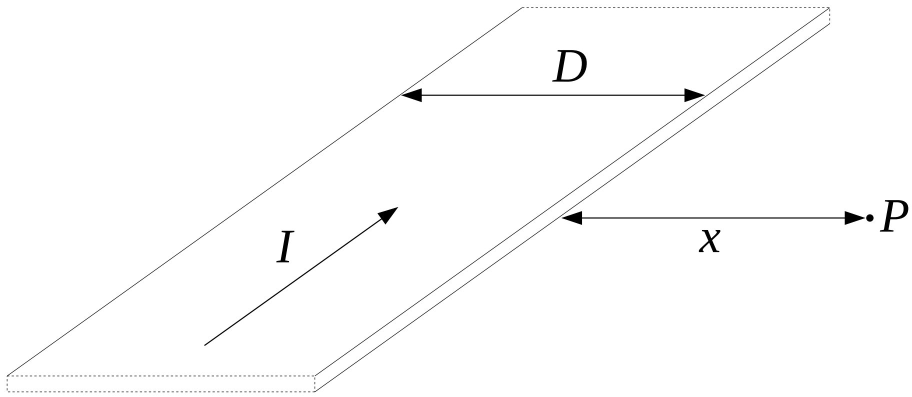
(c) Levando em conta a mudança no sinal de z para pontos acima e abaixo do plano médio da chapa, em qualquer ponto no interior da chapa o vetor campo elétrico vale

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{z}}}.$$

Questão 2

(a) (1,0 ponto) Utilize a lei de Ampère para calcular o módulo do campo magnético produzido por um fio relilíneo infinito, transportando uma corrente I, em um ponto situado à distância r do fio.

(b) (1,5 ponto) Uma placa de largura D e espessura desprezível, transporta uma corrente I, uniformemente distribuída. Determine o módulo do campo magnético no ponto P, situado no plano da placa, a uma distância x de uma das extremidades, conforme mostrado na figura.



Solução da questão 2

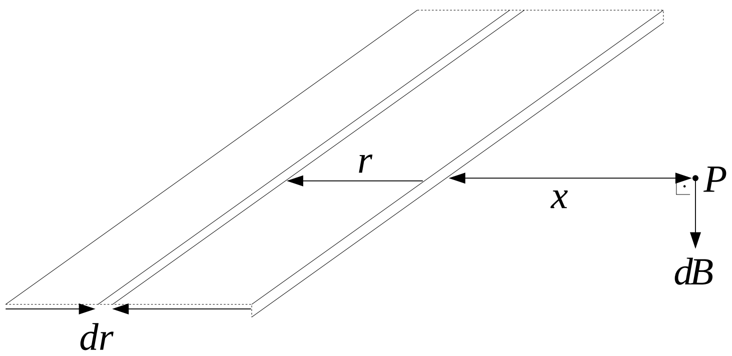
(a) Tomando uma curva circular C de raio r, concêntrica e perpendicular ao fio, o campo magnético é tangencial à curva em todos os seus pontos. A lei de Ampère produz então

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

de modo que o módulo do campo magnético é

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}.$$

(b) Podemos decompor a placa em tiras de largura dr, cuja distância ao ponto P é $r+x$, conforme a figura abaixo.



Todas as tiras produzirão em P campos magnéticos cuja direção é perpendicular ao plano da placa, de modo que precisamos considerar apenas seus módulos. Do resultado do item (a), a contribuição da tira para o campo magnético em P é

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(r+x)},$$

sendo dI a contribuição da tira para a corrente total. Como I é distribuída uniformemente,

$$dI = \frac{I}{D} dr.$$

Integrando de $r = 0$ até $r = D$ temos

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \int_0^D \frac{dr}{r+x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \int_x^{x+D} \frac{du}{u} = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \ln u \Big|_x^{x+D},$$

de onde concluímos que a intensidade do campo magnético em P é

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} \ln\left(1 + \frac{D}{x}\right)}.$$

Questão 3

Dois solenóides longos, concêntricos e coaxiais possuem o mesmo comprimento L, e respectivamente raios R_1 e R_2 (com $R_2 < R_1$) e números de espiras N_1 e N_2.

(a) (1,0 ponto) Desprezando-se o efeito das bordas, utilize a lei de Ampère para calcular o módulo do campo magnético no interior do solenóide externo quando ele é percorrido por uma corrente I_1?

(b) (1,0 ponto) Calcule a indutância mútua do sistema.

(c) (0,5 ponto) Determine a força eletromotriz induzida sobre o solenoide interno por uma corrente At no solenóide externo, onde A é uma constante e t é o tempo.

Solução da questão 3

(a) O campo magnético produzido pela passagem de uma corrente I_1 através de um solenoide ideal é nulo fora do solenoide, e os efeitos de borda são desprezados, de maneira que o campo magnético no interior é paralelo ao eixo. Com essas hipóteses, o campo magnético no interior pode ser calculado pela lei de Ampère. Vamos tomar como curva de integração um quadrado de lado l, com dois lados paralelos e dois lados perpendiculares ao eixo do solenoide, e com apenas um dos lados paralelos ao eixo contido no interior. Apenas esse lado contribui portanto para a integral de linha na lei de Ampère, produzindo

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_1 l = \mu_0 N_1 \frac{l}{L} I_1,$$

sendo $N_1 I_1 l/L$ a corrente total que atravessa a superfície aberta definida pelo quadrado. Portanto, no interior do solenoide externo o campo magnético tem módulo $\boxed{B_1 = \mu_0 N_1 I_1/L}$.

(b) A indutância mútua do sistema de dois solenoides é definida como

$$M = \frac{N_1 \phi_{1,2}}{I_2} = \frac{N_2 \phi_{2,1}}{I_1},$$

em que $\phi_{1,2}$ é o fluxo do campo magnético produzido pelo solenoide 2 através de uma única espira do solenoide 1, $\phi_{2,1}$ é o fluxo do campo magnético produzido pelo solenoide 1 através de uma única espira do solenoide 2, e I_1 e I_2 são as correntes que percorrem os solenoides 1 e 2, respectivamente.

Da resposta do item (a), o fluxo do campo magnético produzido pelo solenoide externo através de uma única espira do solenoide interno é

$$\phi_{2,1} = \oint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A} = B_1 \pi R_2^2 = \mu_0 N_1 \frac{\pi R_2^2}{L} I_1,$$

sendo S_2 a superfície plana definida pela espira.

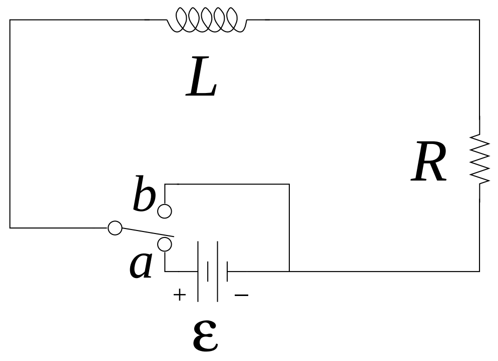
Portanto, a indutância mútua é dada por

$$\boxed{M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_2^2}{L}}.$$

(b) A força eletromotriz induzida sobre o solenoide 2 pela variação da corrente no solenoide 1 é, segundo a lei de Faraday,

$$\varepsilon_{2,1} = -N_2 \frac{d\phi_{2,1}}{dt} = -M \frac{dI}{dt} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_{2,1} = -MA}.$$

Questão 4



O circuito da figura é composto de uma fonte de força eletromotriz $\mathcal{E}$, de um resistor R e de um indutor L.

(a) (1,0 ponto) A chave é mantida na posição a por um longo tempo e a corrente atinge um valor constante I. Determine I.

(c) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial que descreve a evolução temporal da corrente no circuito com a chave na posição b.

(d) (1,0 ponto) Determine a corrente como função do tempo para o circuito com a chave na posição b sabendo-se que no instante $t = 0$ a corrente é I_0.

Solução da questão 4

(a) Mantendo a chave na posição a por um tempo longo a corrente atinge o valor estacionário e o indutor se comporta como pedaço de fio condutor. Assim, o circuito é equivalente a uma fem em série com o resistor e a corrente é

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}}.$$

(b) Segundo a lei de Faraday, tomando C como uma curva que acompanha a malha fechada do circuito, e percorrendo-a no sentido da corrente i,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -L\frac{di}{dt}.$$

Tomando o indutor como um condutor ideal, apenas o resistor produz uma contribuição não-nula para a integral, igual a Ri, a queda do potencial elétrico entre seus terminais. Assim,

$$Ri = -L\frac{di}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{Ri}{L}}.$$

(c) Manipulando a equação obtida no item anterior, temos

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt.$$

Integrando ambos os termos, utilizando a condição inicial calculada no item (a),

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt',$$

e exponenciando ambos os lados da equação resultante,

$$\ln\frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L}t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}.$$

Formulário

$$\Phi_e = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell},$$

$$C = \frac{|Q|}{|V|}, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2.$$

$$dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0,$$

$$\mu = (1+\chi_m)\mu_0 \equiv K_m\mu_0, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi^{espira} = LI, \quad \Phi_{2,1}^{total} = N_2\phi_{2,1}^{espira} = M_{2,1}I_1 = MI_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$