P1

Física III - 4320301

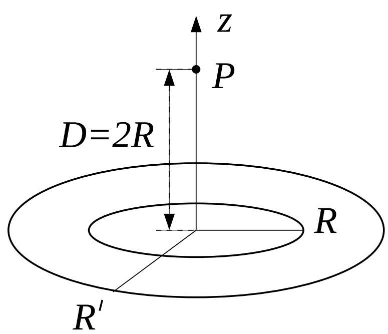
Escola Politécnica - 2010

GABARITO DA P1

31 de março de 2011

Questão 1

Dois anéis finos concêntricos de raios R e $R' = 3R$, encontram-se no plano xy. O centro dos anéis coincide com a origem do sistema de coordenadas, conforme a figura. O anel de raio R possui carga total Q e o anel de raio R' possui carga total Q', ambas uniformemente distribuídas.



(a) (0.5 ponto) Calcule o potencial produzido por cada anel sobre o eixo z.

(b) (1,0 ponto) Determine qual deve ser a carga Q' no anel de raio R' para que ele produza no ponto P do eixo z, que está a uma distância $D = 2R$ da origem, o mesmo potencial eletrostático do anel de raio R.

(c) (1,5 ponto) A partir do potencial, calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ em P, em termos de Q e R.

Solução da questão 1

(a) A distância de cada elemento de carga dq do anel de raio R ao eixo z é a mesma, portanto

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{anel}} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_{\text{anel}} dq = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \Longrightarrow \boxed{V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{[R^2+z^2]^{1/2}}}.$$

Analogamente, o potencial produzido pelo anel de carga Q' é

$$\boxed{V'(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q'}{[R'^{\,2}+z^2]^{1/2}}}.$$

(b) Igualando os potenciais obtidos no item (a) obtemos ($D = 2R$ e $R' = 3R$)

$$V(D) = V'(D) \Longrightarrow Q' = Q\left[\frac{R'^{\,2}+D^2}{R^2+D^2}\right]^{1/2} = Q\left[\frac{9+4}{1+4}\right]^{1/2} \Longrightarrow \boxed{Q' = \left(\frac{13}{5}\right)^{1/2} Q}.$$

(c) O campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V_{total} = -\frac{\partial V_{total}}{\partial z}\widehat{z},$$

onde $V_{total} = V(z) + V'(z)$. Portanto,

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Qz}{[R^2+z^2]^{3/2}} + \frac{Q'z}{[R'^{\,2}+z^2]^{3/2}}\right]\widehat{z}.$$

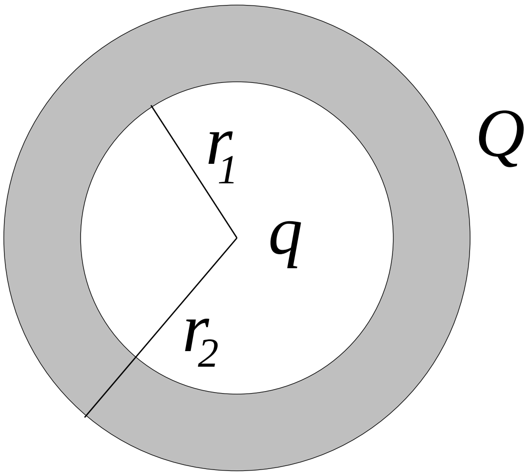
Para $z = 2R$, $Q' = Q\sqrt{13/5}$ e $R' = 3R$ a expressão acima fornece

$$\vec{E}(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2R}{[R^2+4R^2]^{3/2}} + \frac{2R}{[9R^2+4R^2]^{3/2}}\left(\frac{13}{5}\right)^{1/2}\right]\widehat{z}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\vec{E}(2R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{5}R^2}\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{13}\right]\widehat{z}}.$$

Questão 2

Uma casca esférica condutora de raio interno r_1 e raio externo r_2 está carregada com carga elétrica positiva Q. No centro da casca, na cavidade interna, há uma carga puntiforme q.

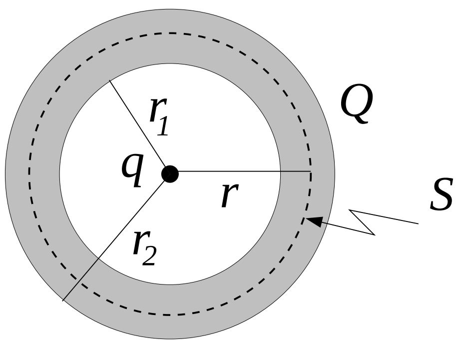


(a) (1,5 ponto) Determine a densidade superficial de carga σ_1 na superfície interna do condutor.

(b) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrica na região externa do condutor.

Solução da questão 2

(a) Por simetria, a carga q_1 induzida por q na superfície interna da casca está uniformemente distribuída.



Seja S uma superfície gaussiana esférica de raio r, com $r_1 < r < r_2$, concêntrica com a casca esférica. A lei de Gauss fornece

$$\frac{q_1 + q}{\epsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0,$$

onde usamos que $\vec{E} = \vec{0}$ dentro do metal. Portanto,

$$\frac{q_1 + q}{\epsilon_0} = 0 \Longrightarrow q_1 = -q \quad \text{e} \quad \boxed{\sigma = \frac{-q}{4\pi r_1^2}}.$$

(b) Na região externa ao condutor o campo $\vec{E}$ tem simetria radial. Usando a Lei de Gauss numa superfície esférica S' de raio $r > r_2$, concêntrica com a casca, obtemos

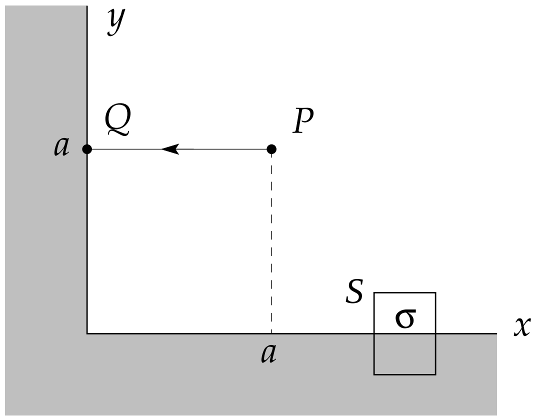
$$\frac{q + Q}{\epsilon_0} = \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{S'} E(r) dA = E(r) 4\pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = E(r)\widehat{e}_r = \frac{q + Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\widehat{e}_r}{r^2}}.$$

Questão 3

Dois semi-planos condutores infinitos se encontram num ângulo reto. Na região entre eles $(x > 0, y > 0)$ o potencial elétrico é dado por

$$V(x, y, z) = Axy,$$

onde $A > 0$ é uma constante positiva.



(a) (1,0 ponto) Determine o campo elétrico no primeiro quadrante $(x > 0, y > 0)$.

(b) (1,0 ponto) Usando a lei de Gauss com a superfície S fechada, cilíndrica e infinitesimal, mostrada de perfil na figura, determine a densidade superficial de carga $\sigma(x, 0, z)$ na face horizontal do condutor.

(c) (0,5 pontos) Determine a integral de linha do campo elétrico

$$\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

ao longo do segmento de reta PQ, conforme a figura.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

(a) Campo elétrico

$$\vec{E} = -\nabla V = -Ay\vec{\imath} - Ax\vec{\jmath}.$$

(b) Densidade superficial de carga no plano $y = 0$

$$\sigma(x, 0, z) = \epsilon_0 \vec{E}(x, 0, z) \cdot \vec{\jmath} = -\epsilon_0 A x.$$

Carga total no quadrado

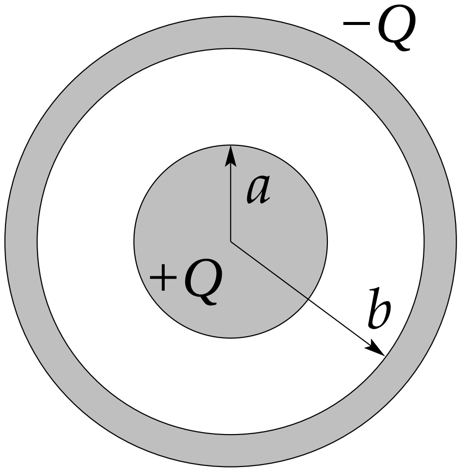
$$Q = \int_S \sigma dA = \int_0^a dx \int_0^a dz \sigma(x, 0, z) = -\epsilon_0 A \int_0^a x dx \int_0^a dz = -\frac{1}{2}\epsilon_0 A a^3.$$

(c) Integral de linha do campo elétrico

$$\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(P) - V(Q) = Aa^2.$$

Questão 4

Um capacitor é formado por uma esfera condutoras de raio a e uma casca esférica condutora de raio $b > a$, conforme a figura.



A esfera de raio interna tem carga $+Q$ e a casca esférica tem carga $-Q$. As respostas devem ser dadas apenas em termos de ϵ_0, a, b e E_0.

(a) (1,0 ponto) Determine a diferença de potencial V entre a esfera interna e a casca esférica.

(b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância C e determine a energia eletrostática U armazenada no capacitor.

SOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

(a) Aplicando a lei de Gauss a uma superfície gaussiana esférica S de raio r envolvendo a esfera interna obtemos o campo elétrico E.

$$Q = \epsilon_0 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \int_S E(r) dA = \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2 \Longrightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}.$$

A diferença de potencial V entre a esfera interna e a casca esférica é

$$V = -\int_b^a E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Note que integramos de b para a para obter diretamente $V > 0$.

(b) Capacitância

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^{-1}.$$

Energia eletrostática

$$U = \frac{1}{2} QV = 2\pi\epsilon_0 E_0^2 a^4 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2,$$