Física III - 4320301

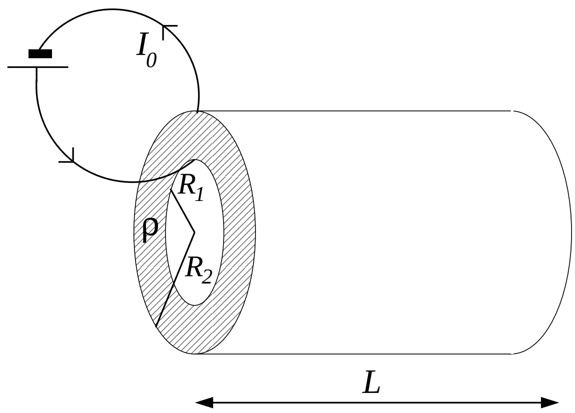
Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA P2

12 de maio de 2011

Questão 1

Considere duas cascas cilíndricas condutoras coaxiais sendo que a casca interior possui raio R_1 e a exterior raio R_2. As cascas cilíndricas possuem comprimento L. O espaço entre as cascas é preenchido uniformemente com um material cuja resistividade é ρ. Entre os duas cascas é aplicada uma diferença de potêncial tal que a corrente medida no dispositivo é I_0. As respostas dos itens abaixo deverão ser dadas em função apenas dos dados do problema que são R_1, R_2, I_0, L, e ρ.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente a uma distância r ($R_1 < r < R_2$) do eixo dos cilindros.

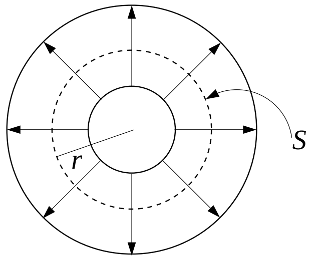
(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico entre os cilindros.

(c) (0,5 ponto) Usando o campo elétrico obtido em (b), calcule a diferença de potencial entre os cilindros.

(d) (0,5 ponto) Calcule a resistência do sistema.

Solução da questão 1

(a) Densidade de corrente



A relação entre a corrente e a densidade de corrente é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = J(r) 2\pi r L$$

Logo,

$$\boxed{\vec{J}(r) = \frac{I_0}{2\pi r L}\,\hat{e}_r}$$

(b) O campo elétrico é calculado com a lei de Ohm

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E} \Longrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho I_0}{2\pi r L}\,\hat{e}_r}$$

(c) A diferença de potencial entre as cascas é

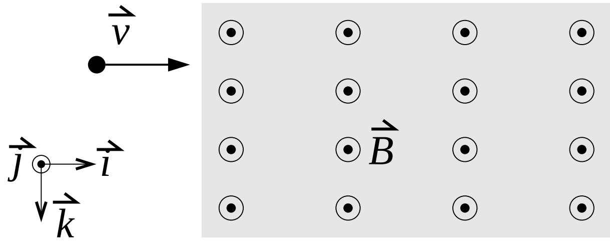
$$|V| = \left| -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right| = \frac{\rho I_0}{2\pi L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\rho I_0}{2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

(d) A resistência é

$$\boxed{R = \frac{|V|}{I_0} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Questão 2

Uma partícula carregada com carga $Q > 0$ e massa M é acelerada paralelamente ao eixo x, no sentido de x crescente, a partir do repouso, por numa diferença de potencial V_0.



(a) (0,5 ponto) Determine o vetor velocidade final $\vec{v}$ da partícula após a aceleração pela diferença de potencial V_0.

(b) (0,5 ponto) A partícula carregada adentra a seguir numa região de campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{\jmath}$. Determine o vetor força magnética que atua sobre a partícula em função de V_0, M, Q e B_0.

(c) (1,5 ponto) Faça um esquema do movimento dessa partícula na região de campo $\vec{B}$. Calcule o raio da trajetória na região com campo magnético e o tempo gasto nesta região.

Solução da questão 2

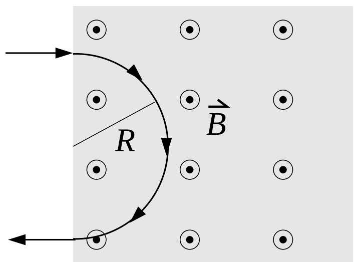
(a) A conservação de energia fornece

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = QV_0 \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2QV_0}{M}} \Longrightarrow \boxed{\vec{v} = \sqrt{\frac{2QV_0}{M}}\ \vec{\imath}}$$

(b) A força magnética é

$$\vec{F}_m = Q\vec{v} \times \vec{B} = Q\ \sqrt{\frac{2QV_0}{M}}\ B_0(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_m = \sqrt{\frac{2Q^3V_0}{M}}\ B_0\ \vec{k}}$$

(c) A trajetória será um semi-círculo dentro da região com campo magnético, conforme a figura.



A força centrípeda é a força magnética

$$\frac{Mv^2}{R} = \sqrt{\frac{2Q^3V_0}{M}}\ B_0$$

Usando a velocidade v do item (a) obtemos

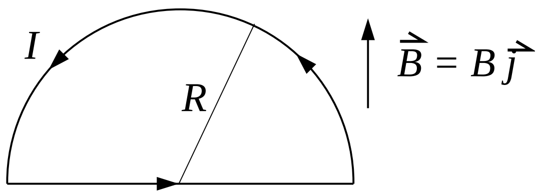
$$\frac{M}{R}\ \frac{2QV_0}{M} = \sqrt{\frac{2Q^3V_0}{M}}\ B_0 \Longrightarrow \boxed{R = \frac{1}{B_0}\ \sqrt{\frac{2MV_0}{Q}}}$$

O tempo gasto na região é

$$T = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{B_0}\ \frac{\sqrt{2MV_0/Q}}{\sqrt{2QV_0/M}} \Longrightarrow \boxed{T = \frac{\pi}{B_0}\frac{M}{Q}}$$

Questão 3

Um fio condutor, curvado na forma de um semicírculo de raio R, forma um circuito fechado e é percorrido por uma corrente I. O circuito está no plano xy e um campo magnético uniforme $\vec{B}$ está aplicado paralelamente ao eixo y, com é visto na figura.



(a) (0,5 ponto) Determine a força magnética total (vetor) sobre as parte retilínea do condutor.

(a) (1,0 ponto) Determine as força magnética total (vetor) sobre as parte curva do condutor.

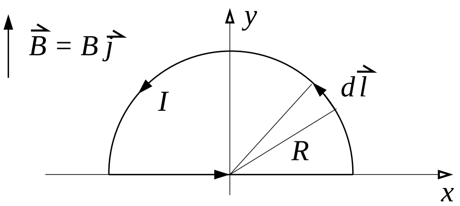
(b) (1,0 ponto) Determine o vetor torque exercido por $\vec{B}$ sobre o circuito.

Solução da questão 3

(a) A força total no elemento retilíneo é

$$\vec{F}_{--} = I\vec{\ell} \times \vec{B} = I2R\vec{\imath} \times B\vec{\jmath} = 2IBR\,\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_{--} = 2IBR\,\vec{k}}$$

(b) A força no elemento $d\vec{\ell}$ do semi-círculo é



$$d\vec{F}_{\frown} = Id\vec{\ell} \times \vec{B} = I(-dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}) \times B\vec{\jmath}$$

$$d\vec{F}_{\frown} = -IdxB\vec{k}$$

A força total no semi-círculo é

$$\vec{F}_{\frown} = IB\int_{-R}^{R} dx\vec{k} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_{\frown} = -2IBR\,\vec{k}}$$

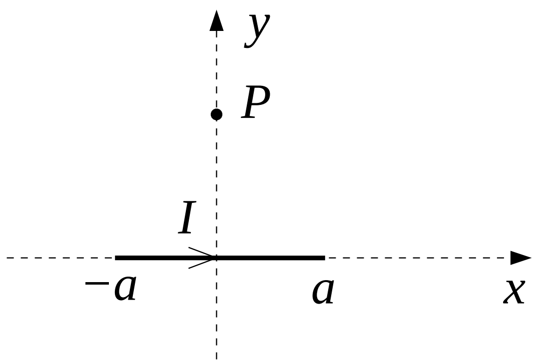
<u>Solução alternativa</u>: A força total num circuito fechado num campo magnético uniforme é zero. Assim, pode-se calcular primeiramente $\vec{F}_{--}$ e em seguida usar que $\vec{F}_{\frown} = -\vec{F}_{--}$.

(c) O torque sobre o circuito com área $A = \pi R^2/2$ é

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (IA\vec{k}) \times B\vec{\jmath} = -IAB\vec{\imath} \Longrightarrow \boxed{\vec{\tau} = -\frac{1}{2}\pi R^2\,B\,\vec{\imath}}$$

Questão 4

Considere um fio de comprimento $2a$ por onde passa uma corrente I colocado ao longo do eixo x, conforme a figura.



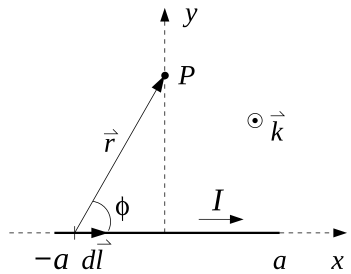
(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Biot-Savart, calcule o campo magnético num ponto P do eixo y

(b) (0,5 ponto) Calcule o campo magnético no limite em que $a \longrightarrow \infty$.

(c) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o campo magnético em P para o fio infinito do item (b).

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) O campo magnético produzido no ponto P pelo pedaço $d\vec{\ell}$ do fio é dado por



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3},$$

onde $d\vec{\ell} = dx\,\vec{\imath}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Da figura obtemos $d\vec{\ell} \times \vec{r} = dx\, r\, \text{sen}\phi\, \vec{k}$ e $\text{sen}\phi = y/\sqrt{x^2+y^2}$. Assim,

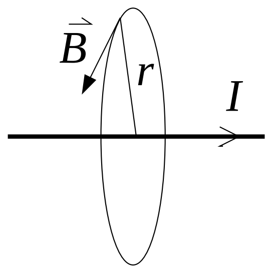
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, y}{4\pi} \frac{dx\,\vec{k}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\, I\, y}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, y} \frac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}\,\vec{k}}$$

(b) No limite em que $a \longrightarrow \infty$ obtemos

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\, y}\,\vec{k}}$$

(c) A lei de Ampère fornece



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, I$$

Como $\vec{B}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$ e $B = B(r)$ podemos escrever

$$\oint B\, d\ell = B(r) \oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0\, I \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}$$

Num ponto a uma distância $r = y$ do fio

$$\boxed{B(y) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi y}}$$

Este resultado é igual ao encontrado no item (b).

Formulário

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad C = |Q|/|V|, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots, \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \sigma_i = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right), \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = nqv_dA, \quad \vec{J} = nq\vec{v}_d,$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad \rho = \frac{1}{\sigma}, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}.$$

Algumas integrais

$$\int \frac{dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \log(x + \sqrt{c+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{(c+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{c\,(c+x^2)^{1/2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{1/2}} = \sqrt{c+x^2}, \qquad \int \frac{x\,dx}{(c+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(c+x^2)^{1/2}},$$