Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA P3

16 de junho de 2011

Questão 1

Um solenóide longo de comprimento h e raio R ($R << h$) tem um enrolamento com N espiras.

(a) (1,5 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide. Calcule a energia armazenada no solenóide quando pelo fio circula uma corrente I. Dado: o campo magnético no interior do solenóide é $B_0 = \mu_0 NI/h$. Ignore a variação do campo próximo às extremidades do solenóide.

(b) (1,0 ponto) Repita os cálculos do item (a) para o caso em que o solenóide está preenchido com um material de suscetibilidade χ_m.

Solução da questão 1

(a) O fluxo total do campo magnético através do solenóide é

$$\left.\begin{aligned} \Phi_m &= NB_0\pi R^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}\, I \\ \Phi_m &= LI \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{h}}.$$

A energia armazenada no solenóide é

$$\boxed{U_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I^2}{2h}}.$$

(b) Ao se preencher o solenóide com um material de suscetibilidade χ_m o campo magnético B_0 muda:

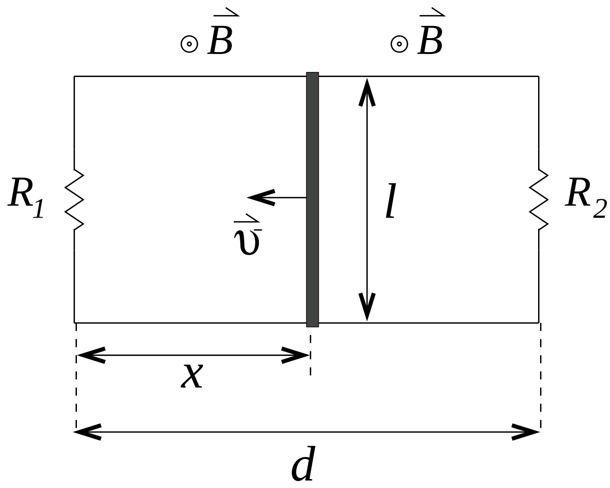
$$B_0 \longrightarrow B = (1+\chi_m)B_0 \Longrightarrow \boxed{L \longrightarrow L' = (1+\chi_m)L = \frac{\mu_0(1+\chi_m)N^2\pi R^2}{h}}.$$

A energia também muda,

$$\boxed{U'_m = \frac{L'I^2}{2} = \frac{\mu_0(1+\chi_m)N^2\pi R^2 I^2}{2h}}.$$

Questão 2

Uma barra condutora perfeita (com resistência nula) desliza sem atrito com velocidade v, para a esquerda, sobre dois fios condutores também perfeitos. Dois resistores R_1 e R_2 estão conectados às extremidades dos dois fios, formando o circuito mostrado na figura. A distância entre os fios horizontais é l, entre os resistores é d, e da barra ao resistor R_1 é x. Um campo magnético uniforme e constante de intensidade B é aplicado perpendicularmente ao circuito, para fora da página. Ao calcular o fluxo magnético através de qualquer superfície, adote o vetor normal à superfície, na mesma direção e sentido do campo magnético.



(a) (0,5 ponto) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente na porção do circuito à direita da barra justificando a sua resposta por meio da lei de Lenz.

(b) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da porção do circuito à direita da barra. Determine a corrente que atravessa o resistor R_2 por meio da lei de Faraday.

(c) (0,5 ponto) Determine o sentido (horário ou anti-horário) da corrente na porção do circuito à esquerda da barra justificando a sua resposta por meio da lei de Lenz.

(d) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da porção do circuito à esquerda da barra. Determine a corrente que atravessa o resistor R_1 por meio da lei de Faraday.

(e) (0,5 ponto) Calcule a intensidade e a direção da força magnética exercida sobre a barra. Essa força é de aceleração ou de frenagem?

Solução da questão 2

(a) O fluxo magnético através da porção direita do circuito está aumentando. Pela lei de Lenz a corrente fluirá nessa porção de modo a produzir um campo magnético que se oponha ao campo externo, ou seja, que aponte para dentro da página, de modo a diminuir o fluxo. Logo, a corrente percorrerá a porção direita do circuito no sentido horário.

(b) Com a convenção de que o vetor normal à superfície aponta para fora da página, o fluxo magnético através da porção direita do circuito é dado por

$$\boxed{\Phi_2 = Bl(d-x)}\,.$$

Pela lei de Faraday, a força eletromotriz induzida é

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = -Blv \Longrightarrow \boxed{I_2 = \frac{\varepsilon_2}{R_2} = -\frac{Blv}{R_2}}\,.$$

(c) O fluxo magnético através da porção esquerda do circuito está diminuindo. Pela lei de Lenz a corrente fluirá nessa porção de modo a produzir um campo magnético na direção do campo externo, ou seja, que aponte para fora da página, de modo a aumentar o fluxo. Logo, a corrente percorrerá a porção direita do circuito no sentido anti-horário.

(d) Com a convenção de que o vetor normal à superfície aponta para fora da página, o fluxo magnético através da porção esquerda do circuito é dado por

$$\boxed{\Phi_1 = Blx}\,.$$

Pela lei de Faraday, a força eletromotriz induzida é

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = Blv \Longrightarrow \boxed{I_1 = \frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{Blv}{R_1}}\,.$$

(e) Ambas as correntes fluem através da barra de baixo para cima, de modo que a corrente total através da barra é

$$I = |I_1| + |I_2| = Blv\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Portanto, a força magnética sobre a barra será

$$\boxed{F = IlB = B^2l^2v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}\,,$$

apontando da esquerda para a direita, correspondendo a uma força de frenagem.

Questão 3

O circuito RL mostrado na figura 1 contém um resistor R_1 e um indutor L em série com uma bateria de f.e.m. ε_0. A chave S está inicialmente fechada e portanto nenhuma corrente passa pelo resistor R_2, conforme a figura 1.

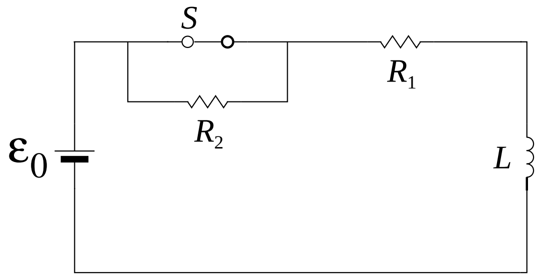


Fig. 1

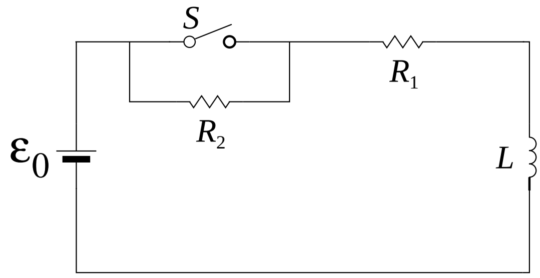


Fig. 2

(a) (0,5 ponto) Se a chave permaneceu fechada por um tempo muito longo antes de $t = 0$, qual é a corrente estacionária I_0 no circuito <u>antes</u> da abertura da chave?

(b) (1,0 ponto) Com a corrente I_0 percorrendo o circuito, a chave S é aberta no instante $t = 0$, de forma que uma nova resistência R_2 é adicionada em série aos demais elementos (veja a figura 2). Escreva equação diferencial para $I(t)$ que descreve o comportamento do circuito para $t > 0$. Qual é a corrente no circuito imediatamente após a abertura da chave?

(c) (1,0 ponto) Imediatamente após a abertura da chave, calcule a força eletromotriz ε_{ind} induzida pela variação de fluxo magnético através do indutor. Expresse sua resposta somente em termos de ε_0, R_1 e R_2.

Solução da questão 3

(a) Tendo a chave permanecido fechada por um longo tempo antes de $t = 0$, os efeitos "inerciais" do indutor já desapareceram, de modo que a corrente estacionária será simplesmente dada por

$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R_1}}.$$

(b) Após a abertura da chave, a resistência total no circuito passa a ser $R_1 + R_2$, de modo que, pela lei de Faraday, a equação diferencial que descreve a dependência temporal da corrente é escrita como

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\varepsilon_0 + (R_1 + R_2)\, I\,(t) = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_0 - (R_1 + R_2)\, I\,(t) - L\frac{dI}{dt} = 0}.$$

Como a corrente não pode variar de forma descontínua devido ao efeito "inercial" do indutor, a corrente imediatamente após a abertura da chave ainda é igual a I_0.

(c) A força eletromotriz induzida pela variação de fluxo magnético através do indutor é

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -L\frac{dI}{dt},$$

e da equação diferencial derivada no item (b) obtemos, imediatamente após a abertura da chave,

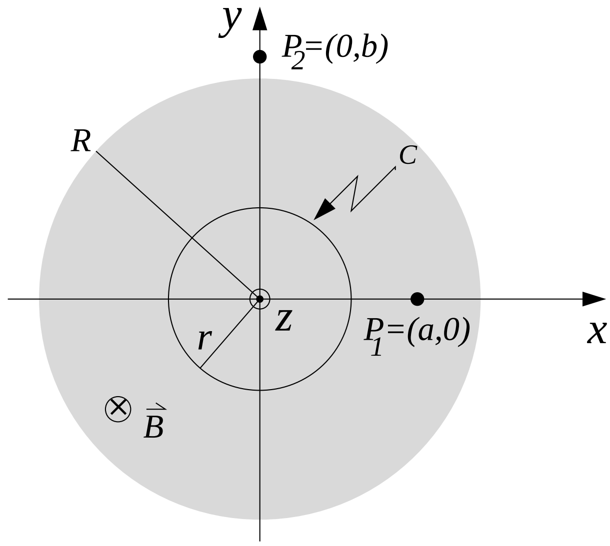
$$\varepsilon_{\text{ind}} = -\varepsilon_0 + (R_1 + R_2)\, I_0 = -\varepsilon_0 + (R_1 + R_2)\,\frac{\varepsilon_0}{R_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{\text{ind}} = \frac{R_2}{R_1}\varepsilon_0}.$$

Portanto, a força eletromotriz induzida tem o mesmo sinal de ε_0, e é muito mais intensa que esta última se $R_2 >> R_1$.

Questão 4

O campo magnético em todos os pontos de uma região cilíndrica de raio R é uniforme e direcionado para dentro da página, variando com o tempo segundo $B = Kt$, onde K é uma constante positiva.



(a) (1,0 ponto) Determine a circulação do campo elétrico, $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, ao longo do círculo C de raio r mostrado na figura, percorrido no sentido anti-horário.

(b) (1,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico (módulo, direção e sentido) nos pontos $P_1 = (a, 0)$ e $P_2 = (0, b)$ da figura, onde $a < R$ e $b > R$.

Solução da questão 4

(a) A circulação do campo elétrico é igual à força eletromotriz e pode ser calculada com a lei de Faraday. A normal para o sentido do percurso da figura é $\widehat{z} \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{A} = -BdA$

$$\varepsilon = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \frac{d(\pi r^2 B)}{dt} = K\pi r^2.$$

(b) O campo é calculado com a lei de Faraday. A simetria cilíndrica do problema implica em $\vec{E} = E(r)\widehat{\phi}$. Além disto, $d\vec{\ell} = d\ell\widehat{\phi}$, portanto para o ponto $P_1 = (a, 0)$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(r)2\pi a = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \pi a^2 K \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_{P_1} = \frac{Ka}{2}\widehat{y}}$$

Para o ponto $P_2 = (0, b)$ temos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E(r)2\pi b = -\frac{d\Phi_m}{dt} = \pi R^2 K \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_{P_2} = -\frac{KR^2}{2b}\widehat{x}}$$

Formulário

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E}-Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1,$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}, \quad \mu = \kappa_m\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0.$$