Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2011

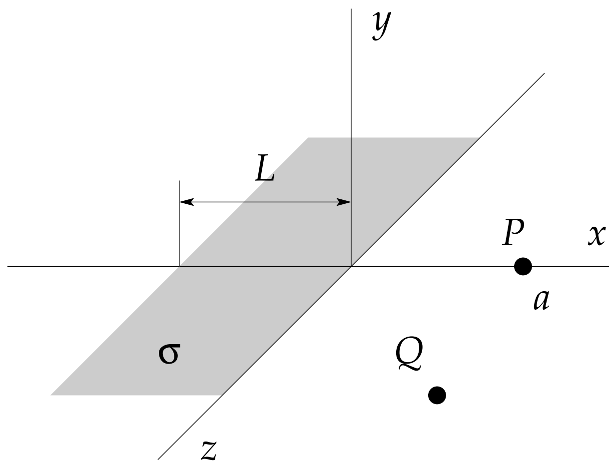
GABARITO DA PR

28 de julho de 2011

Questão 1

(a) (1,0 ponto) Use a lei de Gauss para calcular o vetor campo elétrico produzido por um fio retilíneo infinito com densidade linear de carga λ.

(b) (1,0 ponto) Uma faixa plana infinita de largura L está carregada com densidade superficial de carga σ, conforme a figura. Calcule o vetor campo elétrico $\vec{E}$ no ponto P a uma distância a da borda mais próxima. Sugestão: Decomponha a faixa em tiras elementares de largura dx e utilize o resultado do item (a).



(c) (0,5 pontos) Calcule o trabalho que deve ser realizado para levar uma carga q do ponto $P = (a, 0, 0)$ ao ponto $Q = (a, 0, a)$.

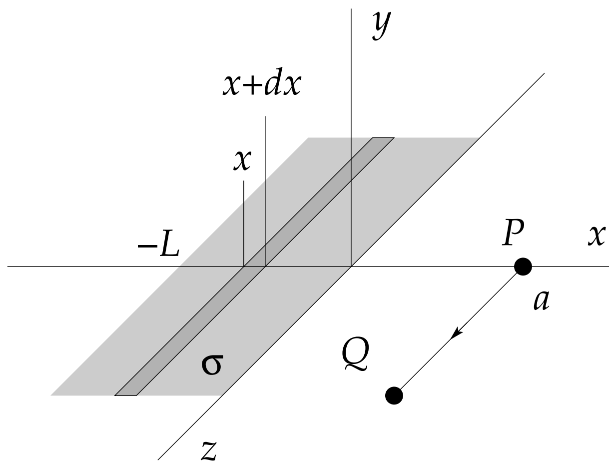
$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) Devido à simetria cilíndrica $\vec{E} = E(r)\hat{r}$, onde r é a distância ao fio. Tomando-se uma superfície gaussiana cilíndrica, de altura h e raio r centrada no fio, obtemos

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}. \qquad \text{Logo} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

(b) Uma tira de largura dx tem densidade linear de carga na direção z igual a σdx. Usando o resultado do item (a), o campo elétrico produzido por uma tira entre x e $x + dx$ no ponto P é

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dx}{2\pi\epsilon_0(a - x)}\vec{\imath}.$$



O campo total é

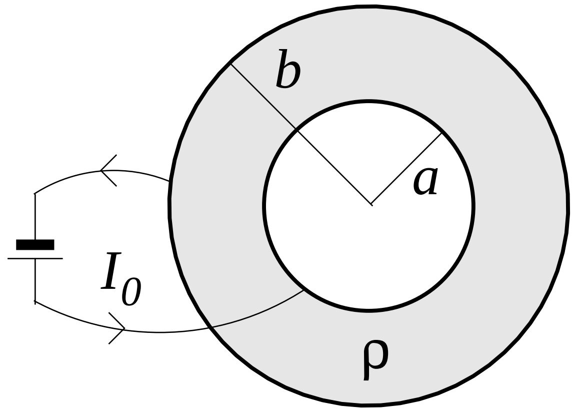
$$\vec{E} = \frac{\sigma\vec{\imath}}{2\pi\epsilon_0}\int_{-L}^{0} \frac{dx}{a - x} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a + L}{a}\right)\vec{\imath}.$$

(c) $\vec{E}$ é perpendicular a $d\vec{l}$ ao longo do segmento de reta PQ. Logo

$$W = -q\int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Questão 2

Considere duas cascas esféricas condutoras concêntricas sendo que a casca interior possui raio a e a exterior raio b. O espaço entre as cascas é preenchido uniformemente com um material cuja resistividade é ρ. Entre os duas cascas é aplicada uma diferença de potencial tal que a corrente da casca interna para a externa é I_0. As respostas dos itens abaixo deverão ser dadas em função apenas dos dados do problema que são a, b, I_0 e ρ.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor densidade de corrente a uma distância r ($a < r < b$) do centro das esferas.

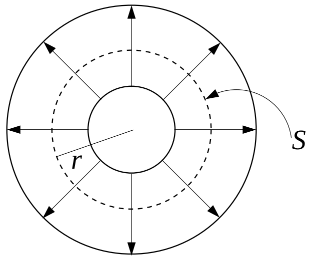
(b) (0,5 ponto) Determine o vetor campo elétrico entre as cascas esféricas.

(c) (0,5 ponto) Usando o campo elétrico obtido em (b), calcule a diferença de potencial V da esfera interna relativamente à esfera externa ($V = V_a - V_b$).

(d) (0,5 ponto) Calcule a resistência do sistema.

Solução da questão 2

(a) Densidade de corrente



A relação entre a corrente e a densidade de corrente é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = J(r) 4\pi r^2$$

Logo,

$$\boxed{\vec{J}(r) = \frac{I_0}{4\pi r^2}\,\widehat{e}_r}$$

(b) O campo elétrico é calculado com a lei de Ohm

$$\vec{J} = \frac{1}{\rho}\vec{E} \Longrightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho I_0}{4\pi r^2}\,\widehat{e}_r}$$

(c) A diferença de potencial entre as cascas é

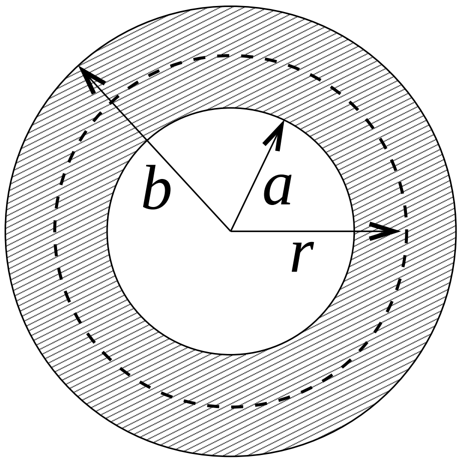
$$V = V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\rho I_0}{4\pi} \int_b^a \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{\rho I_0}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

(d) A resistência é

$$\boxed{R = \frac{V}{I_0} = \frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}$$

Questão 3

A figura abaixo mostra a seção reta de um condutor cilíndrico infinito, oco, com raio interno a e raio externo b. Pelo condutor passa uma corrente I uniformemente distribuída na seção reta e dirigida para fora da página.



Usando a lei de Ampère, calcule:

(a) (0,5 ponto) o vetor campo magnético na cavidade do condutor ($0 < r < a$);

(b) (1,0 ponto) o vetor campo magnético no interior do condutor ($a < r < b$);

(c) (0,5 ponto) o vetor campo magnético no exterior do condutor ($r > b$).

(d) (0,5 ponto) Esboce as linhas de campo magnético nas três regiões.

Solução da questão 3

A lei de Ampère afirma que

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{total},$$

onde I_{total} é a corrente que atravessa uma superfície aberta limitada pela curva C.

Neste problema o campo $\vec{B}$ tem simetria cilíndrica: $\vec{B} = B(r)\,\widehat{\varphi}$. Assim, é conveniente escolher para C um círculo com centro no eixo do cilindro e contido num plano perpendicular a este eixo, como é sugerido na figura. Neste caso, $\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$ e

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B d\ell = 2\pi r B(r)\ .$$

Substituindo na lei de Ampére obtemos

$$\boxed{B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\, I_{total}}\ .$$

(a) Na cavidade do condutor $(0 < r < a)$ $I_{total} = 0$ e

$$B(r) = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \vec{0}}\ .$$

(b) No interior do condutor $(a < r < b)$ a densidade de corrente é

$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)} \Longrightarrow I_{total} = \pi(r^2 - a^2)J = \frac{I\,(r^2 - a^2)}{b^2 - a^2}\ .$$

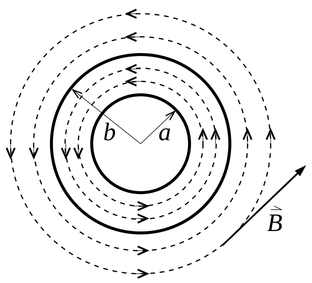
O campo magnético é

$$B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(\frac{r^2 - a^2}{r}\right) \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(\frac{r^2 - a^2}{r}\right) \widehat{\varphi}}\ .$$

(c) No exterior do condutor $(r > b)$ $I_{total} = I$ e

$$B(r) = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r} \Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\, \widehat{\varphi}}\ .$$

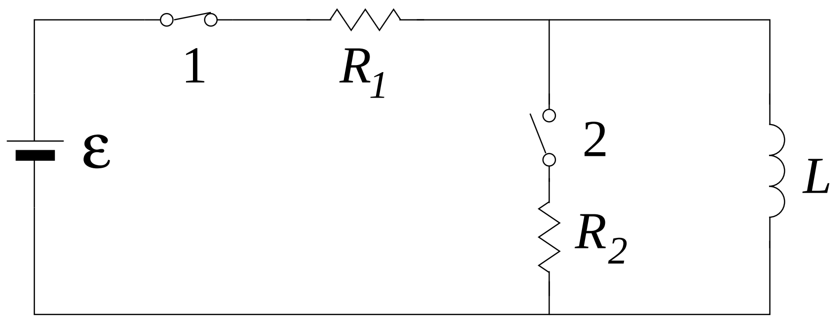
(d) Linhas de campo.



As linhas de campo são círculos concêntricos conforme a figura ao lado. As flechas indicam o sentido do campo $\vec{B}$ que é tangente às linhas de campo.

Questão 4

No circuito da figura a chave 2 está aberta e a chave 1 está fechada há muito tempo, encontrando-se o circuito numa situação estacionária.



(a) (0,5 ponto) Determine a corrente I_0 através do indutor.

(b) (1,0 ponto) No instante $t = 0$ a chave 2 é fechada e simultaneamente a chave 1 é aberta. Escreva a equação diferencial e obtenha a corrente $I(t)$ através do indutor para $t \geq 0$.

(c) (1,0 ponto) Mostre que a energia total dissipada no resistor R_2 para $t \geq 0$ é igual à energia que estava armazenada no indutor.

Solução da questão 4

(a) No regime estacionário o indutor se comporta como um condutor com resistência nula. Portanto,

$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon}{R_1}}\,.$$

(b) Após abrirmos a chave 1 e fecharmos a chave 2, obtemos um circuito RL cuja equação diferencial é

$$L\frac{dI}{dt} + R_2 I = 0 \Longrightarrow \int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R_2}{L}\int_0^t dt \Longrightarrow \ln\left(\frac{I_0}{I}\right) = -\frac{R_2}{L}\,t \Leftrightarrow \boxed{I = I_0 e^{-R_2 t/L}}\,.$$

(c) A potência dissipada é dada por

$$E_{diss} = \int_0^\infty R_2 I^2 dt = R_2 I_0^2 \int_0^\infty e^{-2R_2 t/L} dt = -\,R_2 I_0^2 \frac{L}{2R_2} e^{-2R_2 t/L}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^2$$

que é igual à energia armazenada inicialmente no indutor.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T) = \rho_0[1+\alpha(T-T_0)], \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E}-Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1,$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}, \quad \mu = \kappa_m\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0.$$