Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2011

GABARITO DA PS

30 de junho de 2011

Questão 1

No modelo de Rutherford o átomo é considerado como uma esfera de raio R com toda a carga positiva dos prótons, Ze, concentrada no centro da esfera (Z é o número de prótons e e a carga elementar). A carga negativa dos elétrons, $-Ze$, é uniformemente distribuída no volume desta esfera.

(a) (1,0 ponto) Calcule a distribuição ρ das cargas negativas dos elétrons no volume da esfera. A partir desta, usando a lei de Gauss, calcule o vetor campo elétrico dentro da esfera a uma distância $r < R$ do centro devido apenas aos elétrons.

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo elétrico total dentro da esfera a uma distância $r < R$ do centro devido aos prótons e aos elétrons.

(c) (1,0 ponto) Usando o campo elétrico determindado no item (b) calcule o potencial dentro da esfera impondo que ele se anula na superfície da esfera ($r = R$).

Solução da questão 1

(a) A distribuição volumétrica de carga dos elétrons é

$$\rho = -\frac{Ze}{4\pi R^3/3} \, .$$

A lei de Gauss, com superfície S esférica de raio $r < R$ fornece

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E(r) 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \Longrightarrow \boxed{\vec{E} = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{r}{R^3} \, \widehat{r}} \, .$$

(b) O campo total dentro do átomo é

$$\vec{E}_t = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{1}{r^2} \, \widehat{r} - \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \frac{r}{R^3} \, \widehat{r} \Longrightarrow \boxed{\vec{E}_t = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right) \, \widehat{r}} \, .$$

(c) O potencial, colocando $V(R) = 0$, é

$$V(r) = -\int_R^r E_t(r) dr = -\int_R^r dr \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2R^3}\right)\Bigg|_R^r$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \, \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R}\right)} \, .$$

Questão 2

Considere um capacitor de placas paralelas de área A separadas por uma distância d. O espaço entre as placas é preenchido com um material de constante dielétrica κ e resistividade ρ.

(a) (0,5 ponto) Desprezando o efeito das bordas, deduza a expressão que fornece a capacitância deste capacitor.
Dado: o campo entre as placas de um capacitor de placas paralelas no vácuo é $E_0 = Q/(\epsilon_0\, A)$, onde Q é a carga na placa positiva.

(b) (1,0 ponto) Como o material entre as placas do capacitor não é um isolante perfeito, estabelece-se uma corrente entre elas. Calcule o módulo da densidade de corrente em função de ϵ_0, ρ, κ, A e Q.

(c) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para $Q(t)$. Resolva a equação diferencial com a condição inicial de que a carga na placa positiva no instante $t = 0$ é Q_0.

Solução da questão 2

(a) A capacitância é

$$C = \frac{Q}{|V|} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\frac{Q}{\kappa\epsilon_0 A}d} \Longrightarrow \boxed{C = \frac{\kappa\,\epsilon_0 A}{d}}\,.$$

(b) A lei de Ohm fornece

$$\boxed{J = \frac{1}{\rho}E = \frac{Q}{\rho\kappa\epsilon_0 A}}\,.$$

(c) Lembrando que $I = -dQ/dt$ obtemos

$$\left.\begin{array}{l} I = -dQ/dt \\ I = JA = \dfrac{Q}{\rho\kappa\epsilon_0} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{\rho\kappa\epsilon_0}\,Q}\,.$$

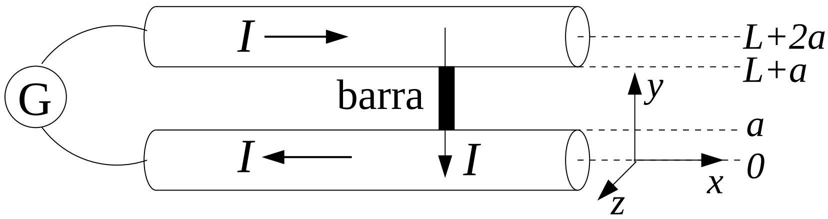
Integrando a equação diferencial e colocando $Q(0) = Q_0$ obtemos

$$\int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{\rho\kappa\epsilon_0}\int_0^t dt \Longrightarrow \boxed{Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{1}{\rho\kappa\epsilon_0}\,t\right)}\,.$$

Questão 3

1. (1,0 ponto) Um condutor cilíndrico infinito de raio a é percorrido por uma corrente I uniformemente distribuída na sua seção reta. Calcule o campo magnético gerado nos pontos fora do condutor.

2. (1,5 ponto) Na figura abaixo o circuito formado por um gerador G e dois trilhos é fechado por uma barra de comprimento L que pode deslizar entre os trilhos. Os trilhos são condutores cilíndricos longos de raio a. O gerador G serve para manter a corrente através do circuito constante e igual a I.



   (a) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético devido aos dois condutores num ponto da barra de coordenada y ($a \leq y \leq L + a$).

   (b) (1,0 ponto) Calcule o vetor força que age sobre a barra.

Solução da questão 3

1. A lei de Ampère fornece

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \Longrightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \widehat{e}_\theta},$$

   onde r é a distância até o eixo do cilindro.

2. Usaremos o campo magnético calculado no item 1.

   (a) Os campos magnéticos gerados pelos dois trilhos apontam na direção $-z$. Portanto, para um ponto da barra com coordenada y o campo magnético total é

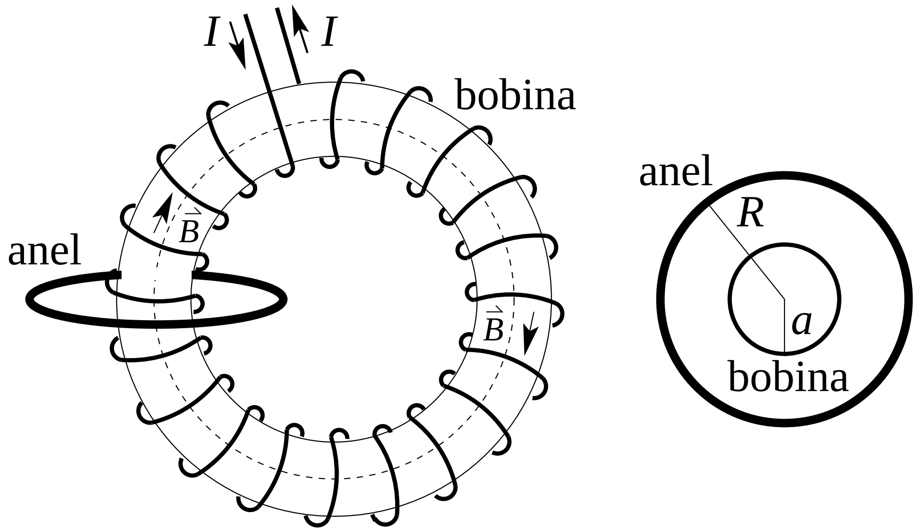
$$\vec{B}_t = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}\, \widehat{e}_z - \frac{\mu_0 I}{2\pi(L+2a-y)}\, \widehat{e}_z \Longrightarrow \boxed{\vec{B}_t = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L+2a-y}\right)\, \widehat{e}_z}.$$

   (b) A força sobre a barra é

$$\vec{F} = I \int d\vec{\ell} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_a^{L+a} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L+2a-y}\right)\, \widehat{e}_x \Longrightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi} \ln\left(\frac{L+a}{a}\right)\, \widehat{e}_x}.$$

Questão 4

Um anel condutor de raio R é colocado em torno de uma bobina toroidal com N espiras e seção reta circular de raio a, conforme a figura.



O campo dentro da bobina toroidal é aproximadamente constante e vale $B = CNI$, onde C é uma constante e I é a corrente no fio da bobina.

(a) (0,5 ponto) Calcule a auto-indutância da bobina toroidal.

(b) (1,0 ponto) Calcule a indutância mútua entre o anel e a bobina toroidal.

(c) (1,0 ponto) Se a corrente na bobina toroidal varia no tempo como $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, qual é o valor do vetor campo elétrico induzido dentro do anel?

Solução da questão 4

(a) O fluxo através da bobina é

$$\Phi = NB\pi a^2 = CN^2\,\pi a^2 I.$$

A auto-indutância é

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I} = CN^2\,\pi a^2}\,.$$

(b) Para calcular a indutância mútua M, basta calcular o fluxo do campo magnético da bobina através do anel

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{21} &= B\pi a^2 = CNI\pi a^2 \\ \Phi_{21} &= MI \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{M = CN\pi a^2}\,.$$

(c) O campo elétrico dentro do anel pode ser calculado com a lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} \Longrightarrow E(r)2\pi R = -\frac{d(B\pi a^2)}{dt} = -CN\pi a^2\frac{dI}{dt} = CN\pi a^2\omega I_0 \mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{CN\omega I_0 \mathrm{sen}(\omega t)\; a^2}{2R}\;\widehat{e}_\theta}\,.$$

Formulário

$$\vec{F}=\frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{F}=q\vec{E},\quad \vec{E}=\frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3},\qquad \vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p=qd,\quad \vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E},\quad U=-\vec{p}\cdot\vec{E},\quad \Phi_E=\int\vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V=\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|},\quad V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{\ell},\quad V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r},\quad \vec{E}=-\vec{\nabla}V,$$

$$V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{r_i},\quad U=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}},\quad C=Q/V,\quad C_{eq}=C_1+C_2+\ldots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots,\quad U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{CV^2}{2}=\frac{QV}{2},\quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0}=\kappa,\quad u=\frac{\epsilon_0}{2}E^2,\quad E=\frac{E_0}{\kappa},$$

$$E=\frac{\sigma}{\epsilon},\quad u=\frac{\epsilon}{2}E^2,\quad \oint\epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A}=q_{int-liv},\quad I=\frac{dQ}{dt}=n|q|v_dA,\quad \vec{J}=n|q|\vec{v}_d,$$

$$\rho(T)=\rho_0[1+\alpha(T-T_0)],\quad dR=\rho\frac{d\ell}{A},\quad V=RI,\quad V=\mathcal{E}-Ir,\quad P=VI=I^2R=\frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B},\quad \Phi_B=\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad d\vec{F}=Id\vec{\ell}\times\vec{B},\quad \vec{\mu}=I\vec{A},$$

$$\vec{\tau}=\vec{\mu}\times\vec{B},\quad U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B},\quad d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},\quad \frac{F}{\ell}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r},\quad \oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I_{int},$$

$$\vec{B}_0=\mu_0\vec{H},\quad \vec{B}_m=\mu_0\vec{M},\quad \vec{M}=\chi_m\vec{H},\quad \mathcal{E}=-\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int\vec{B}\cdot d\vec{A},\quad \Phi^{total}=N\phi_{espira}=LI,\quad \Phi_{21}^{total}=N_2\phi_{espira}=M_{21}I_1,$$

$$u=\frac{B^2}{2\mu_0},\quad U=\frac{LI^2}{2},\quad u=\frac{B^2}{2\mu},\quad \mu=\kappa_m\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0.$$