

Física III - 4320301

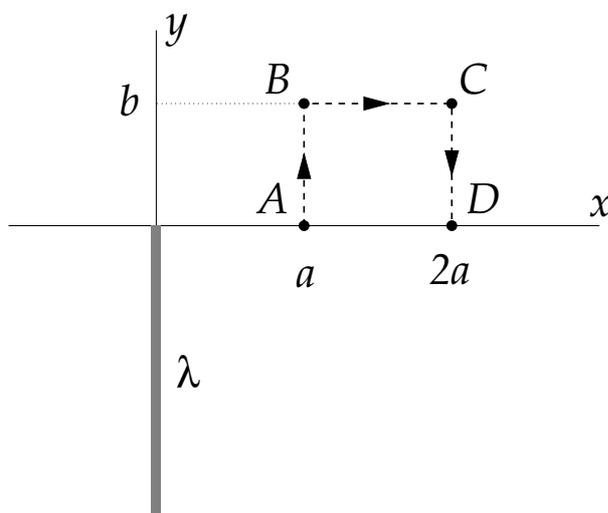
Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA P1

12 de abril de 2012

Questão 1

Uma distribuição de cargas com densidade linear constante $\lambda > 0$ está localizada ao longo do eixo y no intervalo $-\infty < y \leq 0$ conforme a figura.



- (a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico num ponto qualquer do eixo x com coordenada $x > 0$.
- (b) (1,0 ponto) Adotando-se potencial nulo no ponto A do eixo x com $x = a > 0$, calcule o potencial elétrico num ponto do eixo x com coordenada $x > 0$.
- (c) (0,5 pontos) Determine o trabalho que deve ser realizado para levar uma carga q do ponto A do eixo x em $x = a > 0$ ao ponto D do eixo x em $x = 2a > 0$ segundo a trajetória $ABCD$ mostrada na figura.

Solução da questão 1

(a) Campo elétrico no ponto $(x, 0, 0)$ com $x > 0$

$$\vec{E}(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 (\lambda dy) \left[\frac{x\vec{i} - y\vec{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} (\vec{i} + \vec{j}).$$

(b) Potencial elétrico no ponto $(x, 0, 0)$ com $x > 0$

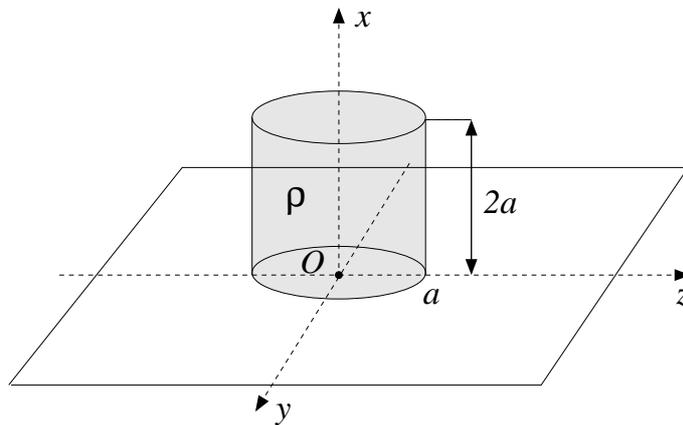
$$V(x, 0, 0) = - \int_{(a,0,0)}^{(x,0,0)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^x \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} (\vec{i} + \vec{j}) \cdot (dx\vec{i}) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{x}{a} \right).$$

(c) O trabalho é igual à diferença de energia potencial entre D e A ,

$$W_{A \rightarrow D} = q(V_D - V_A) = qV_D = qV(2a, 0, 0) = -\frac{q\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2.$$

Questão 2

- (a) (1,0 ponto) Considere um disco de raio a carregado uniformemente com carga Q . Calcule o potencial elétrico ao longo do eixo a uma distância x do centro do disco. Adote potencial nulo no infinito.
- (b) (1,5 ponto) Calcule o potencial elétrico no ponto O com coordenadas $x = y = z = 0$ devido a um cilindro de altura $2a$ e raio de base a , uniformemente carregado com densidade volumétrica de carga ρ . A base do cilindro está contida no plano yz e seu eixo coincide com o eixo x , conforme a figura. Sugestão: Decomponha o cilindro em discos elementares de altura dx e utilize o resultado do item (a).



Solução da questão 2

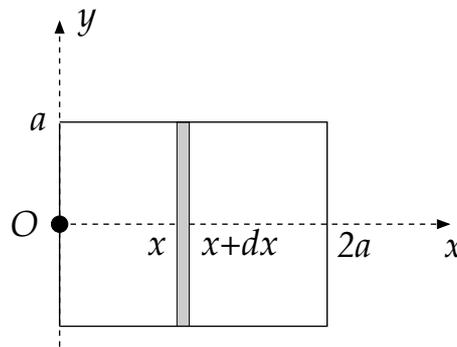
- (a) Decompomos o disco em anéis elementares de raio r e largura dr . A carga do anel elementar de raio r é

$$dq = \sigma dA = \left(\frac{Q}{\pi a^2} \right) (2\pi r dr) = \frac{2Qr dr}{a^2}.$$

O potencial elétrico é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^a \frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right).$$

- (b) Decompomos o cilindro em discos elementares de raio a e altura dx .



Do item (a) o potencial devido a cada disco elementar é

$$dV = \frac{dq}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right); \quad dq = \rho dV = \rho \pi a^2 dx.$$

Logo

$$dV = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right) dx,$$

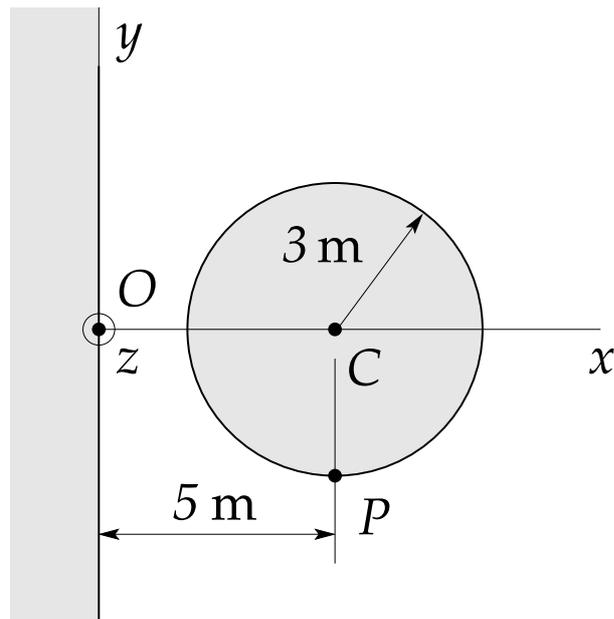
e o potencial resultante em O é

$$V_O = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{2a} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - x \right) dx = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[\frac{x \sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \frac{x^2}{2} \right]_0^{2a}$$

$$V_O = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{5} - 2 + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{5} + 2) \right].$$

Questão 3

O eixo de um cilindro condutor de 3 metros de raio dista 5 metros do plano yz conforme a figura. O cilindro é infinito na direção z perpendicular ao plano da figura e todo o semiespaço $x \leq 0$ é preenchido com um material condutor.



O potencial eletrostático num ponto de coordenadas (x, y, z) no espaço fora dos condutores é dado por

$$V(x, y, z) = 100 \ln \left[\frac{(x+4)^2 + y^2}{(x-4)^2 + y^2} \right] \quad (\text{volts}),$$

onde x , y e z são em metros.

- (0,5 pontos) Determine o potencial no ponto C do eixo do cilindro condutor ($x = 5$ m, $y = z = 0$ m).
- (1,0 ponto) Determine o vetor campo elétrico em todo o espaço, inclusive no interior dos condutores.
- (1,0 ponto) Determine a densidade superficial de carga no ponto O do plano ($x = y = z = 0$ m), e no ponto P ($x = 5$ m, $y = -3$ m, $z = 0$ m) do cilindro. Adote $\epsilon_0 = 9 \times 10^{-12}$ F/m.

Solução da questão 3

(a) Potencial no ponto C do eixo do cilindro

$$V_C = V(2, 0, 0) = 200 \ln 3 \quad \text{V.}$$

(b) Campo elétrico fora dos condutores

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -200 \left[\frac{x+4}{(x+4)^2 + y^2} - \frac{x-4}{(x-4)^2 + y^2} \right] \quad (\text{V/m}), \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -200 \left[\frac{y}{(x+4)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-4)^2 + y^2} \right] \quad (\text{V/m}), \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

No interior dos condutores $\vec{E} = \vec{0}$.

(c) Densidade superficial de carga no ponto O

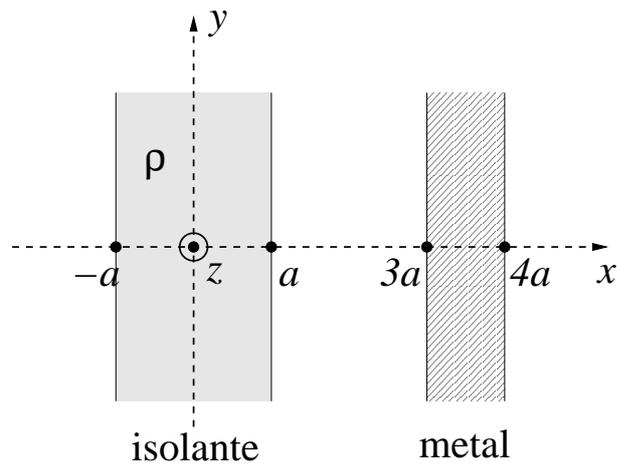
$$\sigma_O = \epsilon_0 \vec{E}_O \cdot \vec{i} = \epsilon_0 E_x(0, 0, 0) = -100\epsilon_0 = -9 \times 10^{-10} \quad \text{C/m}^2.$$

Densidade superficial de carga no ponto P

$$\sigma_P = \epsilon_0 \vec{E}_P \cdot (-\vec{j}) = -\epsilon_0 E_y(5, -3, 0) = \frac{160\epsilon_0}{3} = 4,8 \times 10^{-10} \quad \text{C/m}^2.$$

Questão 4

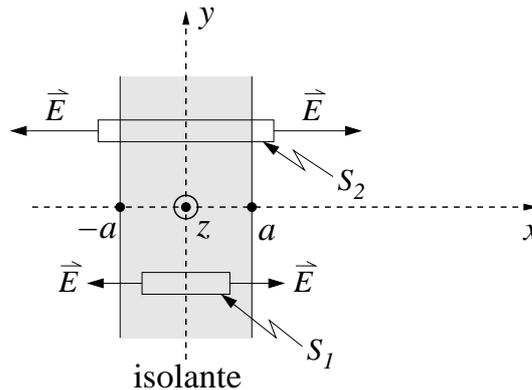
Uma placa isolante, com espessura $2a$ e densidade volumétrica de carga uniforme igual a $\rho > 0$, está separada de uma outra placa, condutora, com carga total igual a zero e de espessura a . As duas placas são infinitas nas direções y e z , conforme a figura.



- (a) (1,0 ponto) Use a lei de Gauss para calcular o vetor campo elétrico produzido pela placa isolante em um ponto dentro da placa, isto é um ponto com coordenada $|x| < a$.
- (b) (0,5 ponto) Use a lei de Gauss para calcular o vetor campo elétrico produzido pela placa isolante em um ponto fora dela.
- (a) (1,0 ponto) Calcule, em termos de ρ e a , a densidade superficial de cargas induzidas nas superfícies da placa condutora após o equilíbrio eletrostático ter sido atingido. Determine em todo o espaço o campo elétrico resultante devido ao isolante e ao condutor.

Solução da questão 4

Vamos utilizar como superfícies gaussianas cilindros transversais às superfícies da placa, de área de base A e altura $2x$, com centro no plano $x = 0$. Em todos os casos, o campo elétrico é perpendicular à placa, de modo que somente há fluxo do campo elétrico pela base e pela tampa do cilindro.



- (a) Para $|x| < a$, o cilindro está inteiramente imerso na placa (superfície S_1 na figura), de modo que a lei de Gauss nos dá

$$\Phi = 2EA = \frac{2\rho x A}{\epsilon_0},$$

sendo $2\rho x A$ a carga envolvida pelo cilindro. Portanto,

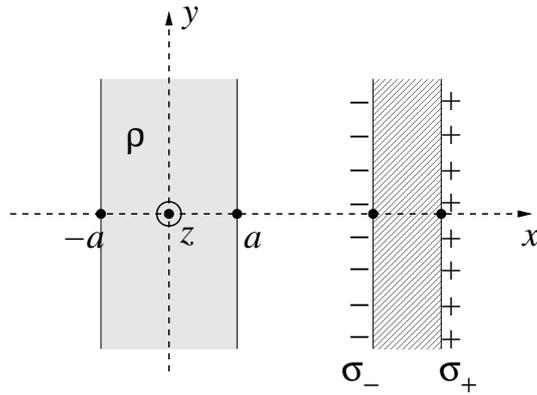
$$E = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \quad \text{e} \quad \vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon_0} \vec{i}, \quad -a < x < a.$$

- (b) Para $|x| > a$, a carga envolvida pelo cilindro é sempre igual a $2\rho a A$ (superfície S_2 na figura), de modo que

$$2EA = \frac{2\rho a A}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\rho a}{\epsilon_0},$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{i} & \text{se } x > a, \\ -\frac{\rho a}{\epsilon_0} \vec{i} & \text{se } x < a. \end{cases}$$

- (c) Para pontos internos à placa condutora, suposta em equilíbrio, o campo tem que ser nulo. Para isto, as cargas induzidas na placa condutora devem se distribuir como na figura abaixo.



Devido à simetria, as densidades superficiais de cargas induzidas σ_+ e σ_- devem ser constantes. Como a placa metálica é neutra $\sigma_+ = -\sigma_- \equiv \sigma$.

Dentro do condutor

$$\vec{E}_{\text{isolante}} + \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \vec{0},$$

onde $\vec{E}_+ = \vec{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{i}$ representam os campos produzidos pelas distribuições de carga positiva e negativa, respectivamente, dentro do condutor.

Assim,

$$\frac{\rho a}{\epsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{i} = \vec{0} \implies \boxed{\sigma = \sigma_+ = -\sigma_- = \rho a}.$$

Como o campo produzido pelas densidades σ_+ e $-\sigma_-$ é nulo fora da placa condutora o campo total fora da placa condutora é igual ao campo devido à placa isolante (itens (a) e (b)). Dentro da placa condutora, como já vimos, o campo total é nulo.

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^3} \vec{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V.$$

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2 \sqrt{u^2 + a^2}}; \quad \int \frac{u du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}};$$

$$\int \frac{u du}{(u^2 + a^2)^{1/2}} = \sqrt{u^2 + a^2}; \quad \int \sqrt{u^2 + a^2} du = \frac{u\sqrt{u^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}).$$