Física III - 4320301

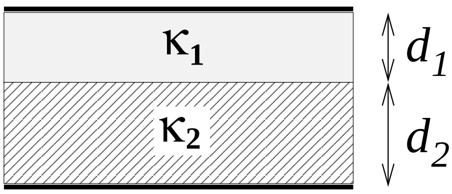
Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA P2

17 de maio de 2012

Questão 1

Um capacitor de placas paralelas e área A, possui o espaço entre as placas preenchido por materiais dielétricos de diferentes constantes dielétricas (κ_1 e κ_2), arranjados em diferentes espessuras (d_1 e d_2, respectivamente), como mostra a figura.



(a) (0,5 ponto) Calcule a capacitância de um capacitor de placas paralelas de área A e distância entre placas, onde há vácuo, igual a d. Dado: o campo elétrico entre as placas do capacitor é $E_0 = \sigma/\epsilon_0$.

(b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância do capacitor da figura.

(c) (1,0 ponto) A placa superior do capacitor está a um potencial $V > 0$ em relação à placa inferior. Determine a densidade de cargas livres na placa superior deste capacitor, e a densidade de cargas ligadas (ou induzidas) na face do dielétrico em contato com esta placa.

Solução da questão 1

(a) O campo elétrico entre as placas do capacitor sem dielétrico é $E_0 = \sigma/\epsilon_0$, onde $\sigma = Q/A$. Portanto,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{E_0 d} = \frac{Q}{d\sigma/\epsilon_0} \Longrightarrow C = \frac{A\,\epsilon_0}{d}$$

(b) Dentro do dielétrico o campo elétrico é reduzido de um fator κ (constante dielétrica). Assim, a ddp V entre as placas do capacitor é

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{E_0}{\kappa_1} d_1 + \frac{E_0}{\kappa_2} d_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left[\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2}\right]$$

A capacitância vale

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{V} = \frac{A\,\epsilon_0}{\dfrac{d_1}{\kappa_1} + \dfrac{d_2}{\kappa_2}}$$

(c) Usando a relação $Q = CV$ e o resultado do item (b) podemos calcular a densidade de cargas livres.

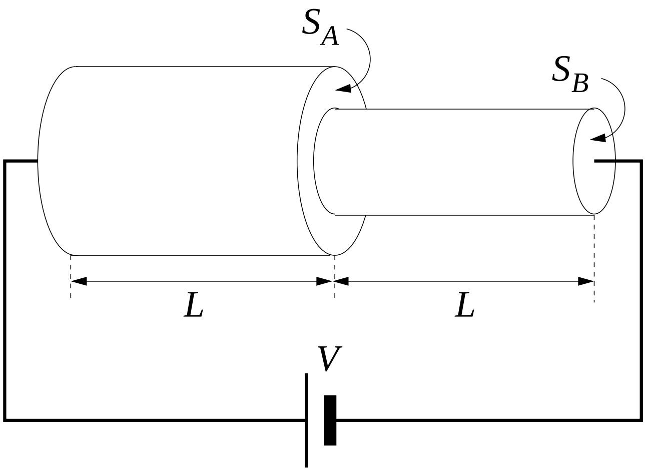
$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{CV}{A} = \frac{V\,\epsilon_0}{\dfrac{d_1}{\kappa_1} + \dfrac{d_2}{\kappa_2}}$$

Chamando σ_i a densidade de carga induzida na superfície do dielétrico 1 e E_i o campo produzido por esta densidade temos (definimos a direção para cima como positiva):

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -\frac{E_0}{\kappa_1} = -\frac{\sigma}{\kappa_1 \epsilon_0} \\ E_1 &= -E_0 + E_i = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_i}{\epsilon_0} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\sigma_i = -\left(\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1}\right)\sigma.}$$

Questão 2

Um resistor cilíndrico de comprimento $2L$ deveria ter uma seção reta S_A ao longo de todo seu comprimento e uma resistência igual a R. Devido a um erro de fabricação, metade do resistor apresenta uma seção reta $S_B = \frac{4}{5}S_A$, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Determine a resistência R' do resistor em termos do valor projetado R.

(b) (1,0 ponto) Aplica-se uma ddp de V volts nas extremidades do resistor. Calcule os módulos dos campos elétricos E_A e E_B em cada um dos trechos do resistor em termos de V e L.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) O valor projetado da resistência é

$$R = \rho \, \frac{2L}{S_A} \, .$$

A resistência do resistor com erro é

$$R' = \rho \, \frac{L}{S_A} + \rho \, \frac{L}{S_B} = \rho \, \frac{9L}{4S_A} = \frac{9}{8} \, R \, .$$

(b) A diferença de potencial V é a soma da diferença de potencial em cada trecho do resistor,

$$V = E_A \, L + E_B \, L \, .$$

Usando a lei de Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, obtemos

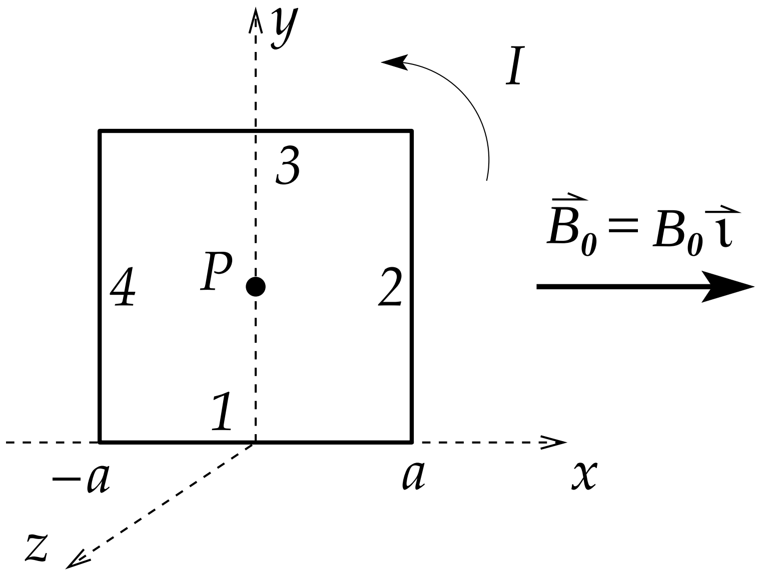
$$\left. \begin{array}{l} J_A = \sigma E_A \Rightarrow E_A = \dfrac{1}{\sigma} \left(\dfrac{I}{S_A} \right) \\ J_B = \sigma E_B \Rightarrow E_B = \dfrac{1}{\sigma} \left(\dfrac{I}{S_B} \right) \end{array} \right\} \Longrightarrow \frac{E_A}{E_B} = \frac{S_B}{S_A} = \frac{4}{5} \Longrightarrow E_A = \frac{4}{5} E_B \, .$$

Substituindo na equação anterior vem

$$E_B = \frac{5V}{9L} \, , \quad E_A = \frac{4V}{9L} \, .$$

Questão 3

Considere uma espira quadrada de lado $2a$ percorrida por uma corrente I. A espira se encontra no plano xy, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule as forças resultantes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ e $\vec{F}_4$ exercidas pelo campo externo $\vec{B}_0 = B_0\vec{\imath}$ sobre cada um dos lados do quadrado.

(b) (1,0 pontos) Determine o vetor torque que o campo externo $\vec{B}_0$ exerce sobre a espira.

(c) (1,0 ponto) Determine o campo magnético produzido pela espira no seu centro $P = (0, a, 0)$. Sugestão: Calcule o campo produzido pelo lado 1 e use a simetria do problema.

Solução da questão 3

(a) Forças sobre os lados da espira.

Força sobre os lados 1 e 3

$$\vec{F}_1 = I\vec{L} \times \vec{B}_0 = I(2a\vec{\imath}) \times (B_0\vec{\imath}) = \vec{0} = \vec{F}_3.$$

Força sobre os lados 2 e 4

$$\vec{F}_2 = I\vec{L} \times \vec{B}_0 = I(2a\vec{\jmath}) \times (B_0\vec{\imath}) = -I2aB_0\vec{k} = -\vec{F}_4.$$

(b) Torque sobre a espira.

As forças $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ formam um binário. Portanto, o torque independe do ponto em relação ao qual ele é calculado. Tomando o centro do lado 4, o torque da espira é

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_2 = (2a\vec{\imath}) \times (-I2aB_0\vec{k}) = I4a^2B_0\vec{\jmath}.$$

Alternativamente,

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0 = (I4a^2\vec{k}) \times (B_0\vec{\imath}) = I4a^2B_0\vec{\jmath}.$$

(c) Campo magnético devido ao lado 1

Com $d\vec{l} = dx\vec{\imath}$ e $\vec{r} = -x\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$,

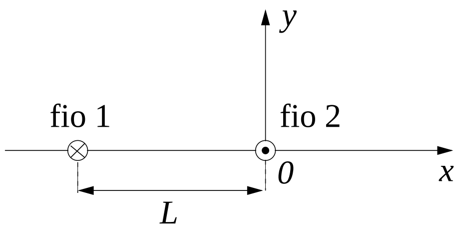
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{x=-a}^{a}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I a}{8\pi}\vec{k}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi a}\vec{k}.$$

Campo no centro da espira

$$\vec{B} = 4\vec{B}_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\vec{k}.$$

Questão 4

A figura abaixo mostra uma seção transversal de dois fios condutores longos (fio 1 e fio 2) estendidos paralelamente um ao outro, ao longo da direção z. Por estes fios circulam correntes i_1 e i_2, em sentidos opostos, sendo i_2 no mesmo sentido do eixo z, conforme a figura.



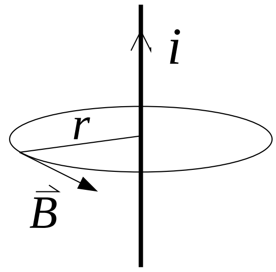
(a) (1,5 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o vetor campo magnético de um fio infinito por onde passa uma corrente i.

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético total devido aos dois fios mostrados na figura para um ponto qualquer do eixo x com $x > 0$.

Solução da questão 4

(a) A lei de Ampère fornece

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i$$



Como $\vec{B}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$ e $B = B(r)$ podemos escrever

$$\oint B\, d\ell = B(r)\oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0\, i \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r}\,\widehat{\theta}}$$

(b) No eixo x o campo gerado pelo fio 1 está na direção negativa do eixo y enquanto que o campo do fio 2 está na direção positiva do eixo y. Assim,

$$\vec{B}(x) = -\frac{\mu_0\, i_1}{2\pi(x+L)}\,\vec{\jmath} + \frac{\mu_0\, i_2}{2\pi x}\,\vec{\jmath} \Longrightarrow \boxed{\vec{B}(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\frac{i_2}{x} - \frac{i_1}{x+L}\right]\,\vec{\jmath}}\,.$$

Formulário

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad C = |Q|/|V|, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots, \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots,$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \sigma_i = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right), \quad \oint \epsilon_0 \kappa \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = nqv_d A,$$

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\widehat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}.$$