Física III - 4320301

Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA P3

28 de junho de 2012

Questão 1

Um solenóide longo, com enrolamento compacto, produz um campo magnético B_0 em seu interior, no vácuo.

(a) (1,0 ponto) Quando o solenóide é preenchido por um determinado material, observa-se que o campo magnético no seu interior *diminui* para $B = 0,9999\,B_0$. Calcule a susceptibilidade magnética do material. Como se classifica esse material quanto à sua propriedade magnética?

(b) (1,0 ponto) O solenóide é agora preenchido por um núcleo de ferro com permeabilidade magnética 1000 vezes maior que o valor μ_0 no vácuo. Determine a magnetização e o campo magnético B no interior do núcleo em função de B_0 e μ_0.

(c) (0,5 ponto) Quando a corrente no solenóide é desligada, o núcleo de ferro apresenta uma magnetização remanente uniforme igual a M_1. Determine o novo valor do campo magnético B_1 no interior do núcleo.

Solução da questão 1

(a) O campo magnético no meio material é dado por

$$B = \mu_0(1 + \chi_m)H = (1 + \chi_m)B_0.$$

Ou, usando o formulário, $B = (1 + \chi_m)B_0$.

Portanto,

$$\chi_m = \frac{B}{B_0} - 1 = 0,9999 - 1 = -10^{-4}.$$

O material é diamagnético.

(b) O campo magnético no interior do núcleo é

$$B = \mu H = 1000\mu_0 H = 1000B_0.$$

Ou, usando o formulário, $B = (1 + \chi_m)B_0 = \mu B_0/\mu_0 = 1000B_0$.

A magnetização é

$$M = \chi_m H = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) H = 999H = 999\frac{B_0}{\mu_0}.$$

Ou, usando o formulário, $M = \chi_m B_0/\mu_0 = (\mu/\mu_0 - 1)B_0/\mu_0 = 999B_0/\mu_0$.

(c) Com o desligamento da corrente $B_0 = 0$. Portanto,

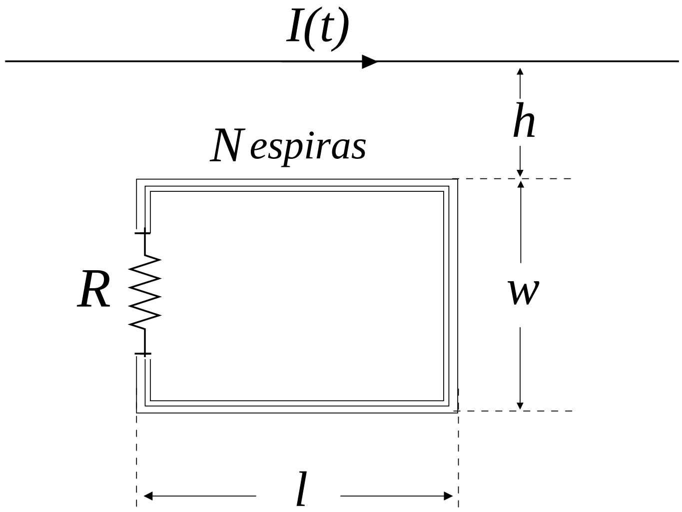
$$B_1 = B_0 + \mu_0 M_1 = \mu_0 M_1.$$

Questão 2

A figura abaixo mostra um fio condutor retilíneo, conduzindo uma corrente

$$I(t) = I_0 \,\mathrm{sen}\,(\omega t).$$

O fio é coplanar a uma bobina retangular com N espiras compactas. A bobina possui resistência R. O fluxo ϕ_m do campo magnético $B(t)$ gerado pelo fio através de uma espira da bobina é dado por $\phi_m = C\, I(t)$, onde C não depende do tempo.



(a) (0,5 ponto) Obtenha a indutância mútua do sistema fio e bobina em função de N e C.

(b) (1,0 ponto) Calcule a potência instantânea $P(t)$ dissipada na bobina.

(c) (1,0 ponto) Calcule o fluxo ϕ_m e através dele determine o valor da constante C em termos de μ_0, l, h e w.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) A indutância mútua é

$$M = \frac{N\phi_m}{I} = NC.$$

(b) A força eletromotriz na bobina é

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(N\phi_m) = \frac{d}{dt}[M\, I_0\, \mathrm{sen}\,(\omega t)] \;=\; -NC\,\omega\, I_0\, \cos\,(\omega t).$$

A partir da fem ϵ calculamos a potência dissipada.

$$P(t) \;=\; \mathcal{E}^2/R \;=\; [NC\,\omega\, I_0\, \cos\,(\omega t)]^2/R$$

(c) O campo magnético produzido pelo fio é

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r},$$

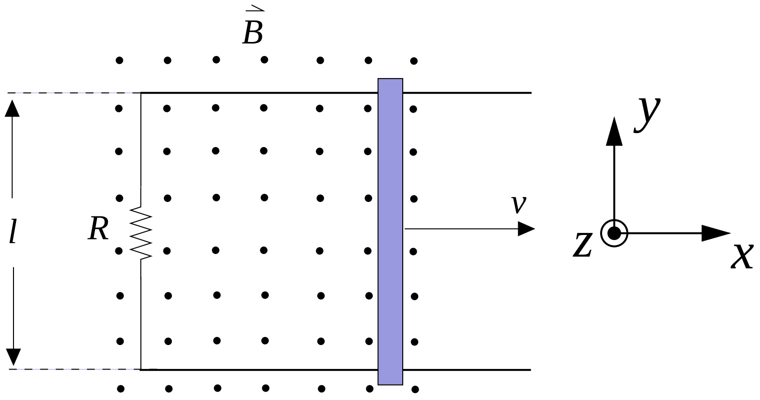
onde r é a distância até o fio. O fluxo através de uma espira é

$$\phi_m = \int B(r)dA = \int_h^{h+w} B(r)l\, dr = \frac{\mu_0}{2\pi} l\, I(t) \int_h^{h+w} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} lI(t) \log\left(\frac{h+w}{h}\right) = CI(t)$$

$$\Longrightarrow C = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log\left(\frac{h+w}{h}\right).$$

Questão 3

A figura abaixo mostra uma barra condutora de comprimento l, deslizando para a direita, com velocidade constante $\vec{v}$, em contato com um fio, de modo a formar um circuito de resistência R. Também está ilustrado na figura um campo magnético $\vec{B}$, constante e uniforme, saindo da página.



(a) (0,5 ponto) Determine o sentido da corrente induzida no circuito (horário ou anti-horário), justificando sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Calcule a corrente induzida I.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor força externa $\vec{F}$ que está sendo aplicada na barra de modo a manter sua velocidade constante.

Solução da questão 3

(a) A força sobre cada elétron é

$$\vec{F}_L = -e\,\vec{v}\times\vec{B} = -e\,(v\,\hat{e}_x)\times(B\hat{e}_z) = e\,v\,B\,\hat{e}_y \;\rightarrow\; I \text{ é para baixo } \rightarrow \text{ sentido horário.}$$

(Lembre que a direção da corrente é dada pelas cargas <u>positivas</u>.) A mesma conclusão segue da lei de Lenz, ou seja, deve aparecer uma corrente de modo a contrapor o aumento do fluxo de B.

(b) O fluxo do campo magnético através do circuito é

$$\Phi_m = Blx(t) \Longrightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -Blv \Longrightarrow I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

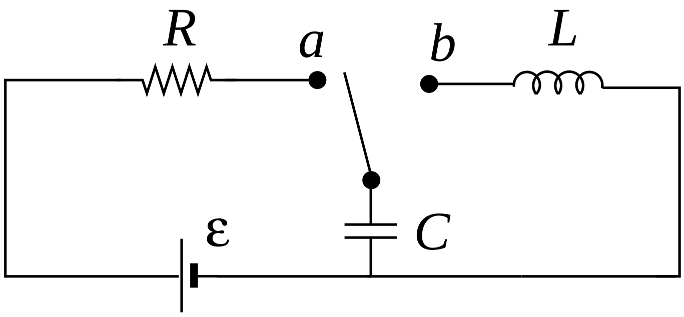
(c) Levando em conta o balanço de energia e considerando que a energia cinética da barra é mantida constante (v constante), então a potência fornecida é igual a potência dissipada no resistor, ou seja,

$$Fv = \mathcal{E}^2/R = (Blv)^2/R$$

$$\Longrightarrow \vec{F} = \frac{(Bl)^2 v}{R}\,\hat{e}_x$$

Questão 4

Considere o circuito formado por uma bateria com fem $\mathcal{E}$, um resistor com resistência R, um capacitor com capacitância C, um indutor com indutância L e uma chave comutadora com duas posições: a e b.



A chave permanece na posição a por um tempo muito longo. Nesta situação, em um instante definido como $t = 0$, a chave passa para a posição b.

(a) (0,5 ponto) Qual é a carga Q_0 na placa superior do capacitor em $t = 0$.

(b) (1,0 ponto) Deduza a equação diferencial para a carga $Q(t)$ na placa superior do capacitor com a chave na posição b. Sabendo que a solução geral da equação diferencial tem a forma $Q(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, determine ω. Usando as condições iniciais para o problema determine A e ϕ.

(c) (1,0 ponto) Determine a energia $U_C(t)$ no capacitor e a energia $U_L(t)$ no indutor como função do tempo. A soma das energias no capacitor e no indutor depende do tempo?

$\boxed{\textbf{Solução da questão 4}}$

(a) A carga na placa superior do capacitor é dada por

$$Q_0 = C\mathcal{E}.$$

(b) A soma algébrica das quedas de tensão ao longo do circuito deve ser nula,

$$V_C + V_L = \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Adotando o sentido horário como o sentido positivo da corrente, $I = dQ/dt$. Portanto,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Substituindo a solução geral $Q(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ na equação acima obtemos

$$\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) A\cos(\omega t + \phi) = 0,$$

o que implica $\omega = 1/\sqrt{LC}$. As condições iniciais são

$$Q(0) = A\cos\phi = Q_0, \qquad I(0) = -A\omega \operatorname{sen}\phi = 0.$$

Portanto $A = Q_0$ e $\phi = 0$ ou $A = -Q_0$ e $\phi = \pi$.

(c) As energias no capacitor e no indutor são dadas, respectivamente, por

$$U_C(t) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega t, \quad U_L(t) = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = \frac{LQ_0^2}{2\omega^2}\operatorname{sen}^2\omega t = \frac{Q_0^2}{2C}\operatorname{sen}^2\omega t.$$

A soma

$$U_C(t) + U_L(t) = \frac{Q_0^2}{2C}$$

independe do tempo. A energia se conserva.

Formulário

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}\times\vec{B}, \quad U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0\vec{H}, \quad \vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H} = \chi_m\frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m,$$

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0, \quad \mu = \kappa_m\mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$