Física III - 4320301

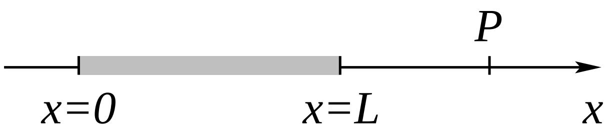
Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA PR

19 de julho de 2012

Questão 1

Um bastão fino de comprimento L, situado ao longo do eixo x, tem densidade linear de carga $\lambda(x) = Cx$, para $0 < x < L$ e C é uma constante positiva.



(a) (1,0 ponto) Calcule o potencial elétrico produzido pelo bastão num ponto P do eixo x de coordenada $x > L$.

(b) (1,0 ponto) A partir do potencial calculado no item (a), calcule a componente x do campo elétrico num ponto P do eixo x de coordenada $x > L$.

(c) (0,5 ponto) Calcule a carga total Q do bastão. Expresse sua resposta em termos de C e L.

Solução da questão 1

(a) O potencial elétrico em um ponto do eixo x com $x > 0$ é

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{Cx'dx'}{x - x'} = -\frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left[x' + x\ln(x - x')\right]_0^L$$

$$\Longrightarrow V(x) = -\frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left[L + x\ln\left(\frac{x - L}{x}\right)\right].$$

(b) A componente x do campo elétrico pode ser obtido através do potencial:

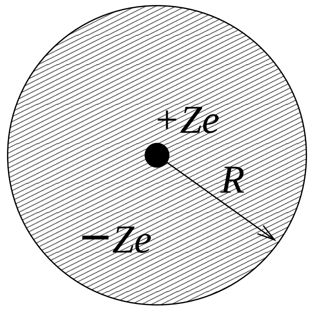
$$E_x(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{x - L}{x}\right) + \frac{x}{x - L} - 1\right] = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln\left(\frac{x - L}{x}\right) + \frac{L}{x - L}\right].$$

(c) A carga total no bastão é

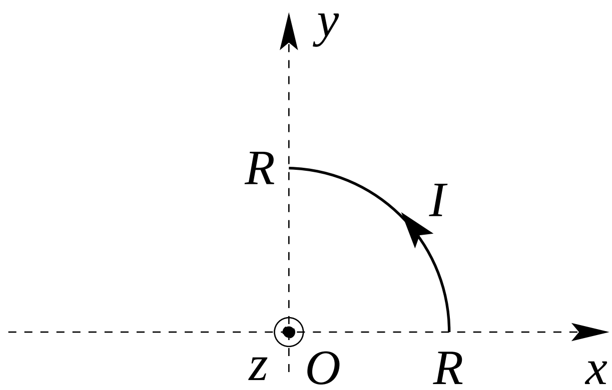
$$Q = \int_0^L \lambda(x)dx = \int_0^L Cxdx = C\frac{x^2}{2}\bigg|_0^L = C\frac{L^2}{2}.$$

Questão 2

(I) (1,0 ponto) O modelo de átomo de Rutherford consiste de uma carga puntiforme positiva $+Ze$, circundada por uma carga negativa $-Ze$ uniformemente distribuída numa esfera de raio R centrada na carga positiva, conforme a figura 2. Calcule o vetor campo elétrico num ponto dentro do átomo, isto é num ponto a uma distância $r < R$ do centro da esfera.



(II) Considere o trecho de um fio condutor na forma de um arco de 1/4 de círculo de raio R por onde passa uma corrente I. O arco está no plano xy, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo fio no ponto O (origem do sistema de coordenadas).

(b) (0,5 ponto) Se houver um campo magnético homogêneo $\vec{B} = B\vec{k}$ em todo o espaço, qual é o vetor força resultante sobre o arco?

Solução da questão 2

(I) Modelo de Rutherford.

O campo elétrico devido à carga puntiforme $+Ze$ é

$$\vec{E}_+ = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\widehat{r}.$$

A carga negativa tem densidade volumétrica igual a $\rho = -\dfrac{Ze}{4\pi R^3/3}$. O campo elétrico $\vec{E}_-$ produzido pela carga negativa num ponto a uma distância r do centro é igual, pela lei de Gauss, ao campo produzido por uma esfera de raio r e densidade ρ. Isto é,

$$\vec{E}_- = \frac{\rho\, 4\pi r^3/3}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\widehat{r} = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}\,\widehat{r}.$$

Portanto, o campo total é

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)\widehat{r}.$$

(II) Fio condutor.

(a) O campo produzido por um elemento $d\vec{\ell}$ do fio é dado pela lei de Biot-Savart,

$$d\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2},$$

onde $\hat{r}$ é um versor que aponta do elemento $d\vec{\ell}$ em direção ao ponto O. Note que para todos os elementos $d\vec{\ell}\times\hat{r} = d\ell\,\vec{k}$, além disto $r = R$, portanto

$$\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{R^2}\int d\ell\,\vec{k} = \frac{\mu_0 I}{8R}\,\vec{k}.$$

(b) A força sobre o elemento $d\vec{\ell}$ do fio é

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell}\times\vec{B}.$$

A força sobre todo o fio, lembrando que $\vec{B}$ é homogêneo, é

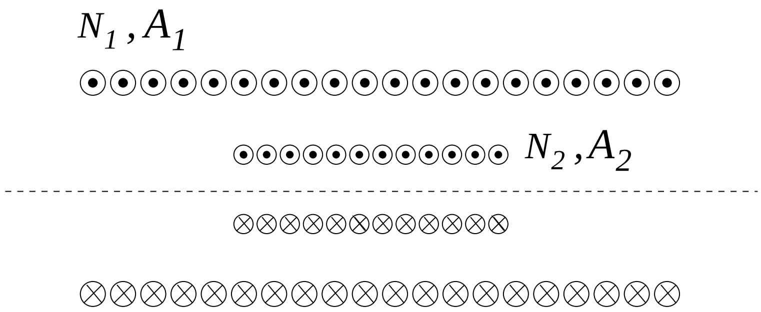
$$\vec{F} = I\left(\int d\vec{\ell}\right)\times\vec{B} = I(-R\vec{\imath} + R\vec{\jmath})\times B\vec{k} = IRB(\vec{\imath}+\vec{\jmath}).$$

Questão 3

(a) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o campo magnético dentro de um solenóde de comprimento L com N_1 espiras de área A_1 percorridas por uma corrente I.

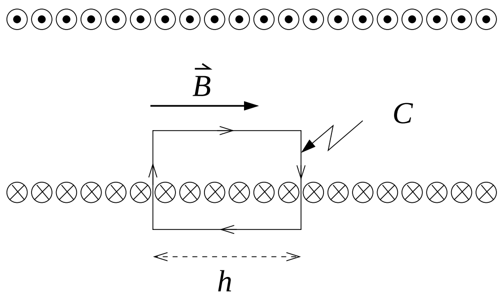
(b) (0,5 ponto) Calcule a auto-indutância do solenóide do item (a).

(c) (1,0 ponto) Dentro do solenóide do item (a) é colocado um solenóide menor com N_2 espiras de área A_2. Os eixos dos dois solenóides coincidem, conforme a figura. Calcule a indutância mútua entre os dois solenóides.



Solução da questão 3

(a) O campo magnético fora do solenóide é zero. Dentro, o campo é uniforme e tem a direção do eixo do solenóide. Usando a lei de Ampère com o caminho C mostrado na figura obtemos



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow Bh = \mu_0 \frac{N_1}{L} hI$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \mu_0 \frac{N_1}{L} I}\,.$$

(b) O fluxo total do campo magnético através das N_1 espiras do solenóide é

$$\Phi_{total} = N_1 \phi_{espira} = N_1 \mu_0 \frac{N_1}{L} I A_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} A_1 I,$$

onde I é a corrente no solenóide. Como $\Phi_{total} = LI$, onde L é a auto-indutância, obtemos

$$L = \mu_0 \frac{N_1^2}{L} A_1.$$

(c) O fluxo magnético Φ_{21} no solenóide menor com N_2 espiras, devido ao solenóide maior com N_1 espiras é

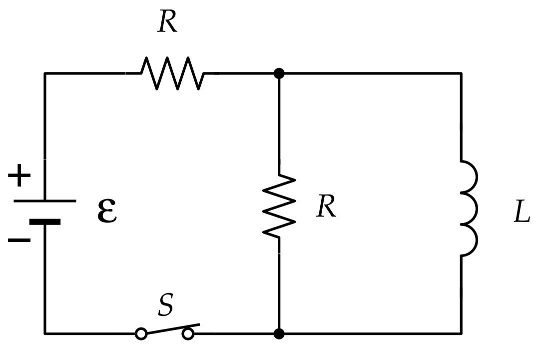
$$\Phi_{21} = N_2 \phi_{espira} = N_2 \mu_0 \frac{N_1}{L} I A_2 = \mu_0 \frac{N_1\, N_2}{L} A_2 I,$$

mas $\Phi_{21} = MI$, onde M é a indutância mútua, portanto

$$M = \mu_0 \frac{N_1\, N_2}{L} A_2.$$

Questão 4

No circuito mostrado na figura a chave S permaneceu fechada por muito tempo. A chave S é aberta no instante $t = 0$.



(a) (0,5 ponto) Calcule o valor I_0 da corrente através do indutor no instante $t = 0$.

Se você não resolver o item (a), deixe as respostas dos itens (b) e (c) em termos de I_0.

(b) (1,0 ponto) Escreva a equação diferencial para a corrente $I(t)$ no indutor para $t \geq 0$ e encontre a solução que satisfaz a condição inicial.

(c) (0,5 ponto) Calcule a energia total dissipada no resistor a partir de $t = 0$.

(d) (0,5 ponto) Se $R = 10\,\Omega$ e $L = 5$ mH, em quanto tempo a corrente cai para metade de seu valor inicial? Dado: $\ln 2 \approx 0,70$.

Solução da questão 4

(a) Após um tempo muito longo, com a chave S fechada, o indutor se comporta como um fio ideal de resistência nula. Assim, só passa corrente através do indutor e do resistor mais ao alto da figura. A corrente em $t = 0$ é

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

(b) A equação diferencial do circuito RL que resulta ao abrir-se a chave S é

$$-L\frac{dI}{dt} = RI \Leftrightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I.$$

A equação acima pode ser integrada

$$\int\limits_{I_0}^{I(t)} \frac{dI'}{I'} = -\int\limits_0^t \frac{R}{L}\,dt' \Longrightarrow \ln\left(\frac{I(t)}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \Longrightarrow I(t) = I_0 e^{-Rt/L} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-Rt/L}.$$

(c) A energia total dissipada pelo resistor é

$$E_{diss.} = \int\limits_0^\infty RI^2 dt = \int\limits_0^\infty RI_0^2 e^{-2Rt/L} dt = -R\frac{L}{2R}I_0^2 e^{-2Rt/L}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

O último termo é exatamente a energia no indutor em $t = 0$.

(d) A corrente cai pela metade no instante $t = t_{1/2}$ obtido através de

$$I(t_{1/2}) = I_0 e^{-Rt_{1/2}/L} = \frac{I_0}{2} \Longrightarrow e^{-Rt_{1/2}/L} = \frac{1}{2} \Longrightarrow t_{1/2} = \frac{L}{R}\ln 2 \approx 3,5 \times 10^{-4} s.$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$\Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell},$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V,$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q|v_d A, \quad \vec{J} = n|q|\vec{v}_d,$$

$$V = RI, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}, \quad \vec{F} = q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0,$$

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt},$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A}, \quad \Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1,$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

$$\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b), \quad \int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b).$$