Física III - 4320301

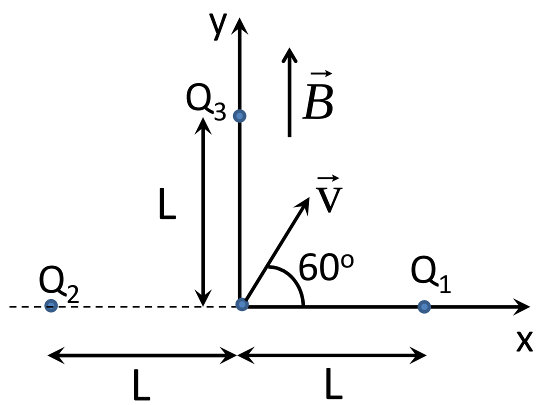
Escola Politécnica - 2012

GABARITO DA PS

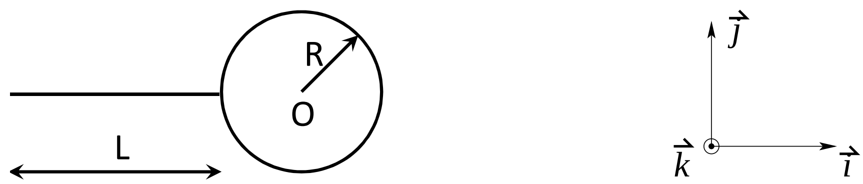
5 de julho de 2012

Questão 1

(a) (1,0 ponto) Considere a configuração da figura em que as cargas pontuais $Q_1 = q$, $Q_2 = -q$ e $Q_3 = 2q$, com $q > 0$, estão fixas nas posições indicadas. Além disso, está presente no espaço um campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{\jmath}$. Num determinado instante, uma outra carga q passa pela origem do sistema de coordenadas com velocidade $\vec{v}$ no plano xy, formando um angulo de 60° com o eixo x, conforme a figura. Calcule neste instante o vetor força eletromagnética sobre essa carga em termos dos versores $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$.



(b) (1,5 ponto) Um fio carregado com densidade linear de carga $\lambda > 0$ é composto de um segmento de reta de comprimento L conectado a um círculo de raio R, conforme a figura. Calcule o vetor campo elétrico no ponto O (centro do círculo).



$\boxed{\textbf{Solução da questão 1}}$

(a) A força sobre a carga q devida ao campo magnético é

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB \operatorname{sen} 30^\circ \vec{k} = \frac{qvB}{2}\vec{k}.$$

As forças devido às cargas Q_1, Q_2 e Q_3 são dadas por

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2}\vec{\imath} \quad \text{e} \quad \vec{F}_3 = -\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2}\vec{\jmath}.$$

Portanto, a força total sobre a carga q é

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) + \frac{qvB}{2}\vec{k}.$$

(b) Devido à simetria, o campo elétrico em O devido à parte circular do fio se anula. O campo devido à parte linear do fio é

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\lambda}{(L+R-x)^2}dx\,\vec{\imath} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda L}{R(L+R)}\,\vec{\imath}.$$

Questão 2

Duas cascas esféricas condutoras, concêntricas, com raios a e $2a$, estão carregadas com cargas $+Q$ e $-Q$, respectivamente. O espaço entre as cascas esféricas está preenchido com um material dielétrico de permissividade ϵ.

(a) (0,5 ponto) Calcule o campo elétrico na região entre as placas.

(b) (1,0 ponto) Calcule a capacitância deste objeto.

(c) (1,0 ponto) Suponha que o material entre as placas tem condutividade σ. Calcule a resistência elétrica entre as placas desse capacitor.

Solução da questão 2

(a) Na ausência de dielétrico, o campo entre as cascas esféricas pode ser calculado com a lei de Gauss usando uma superfície S esférica de raio r ($a < r < 2a$), concêntrica com as duas cascas. Como o campo é radial,

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \oint_S E_0 dA = 4\pi r^2 E_0(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow \vec{E}_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\widehat{r}.$$

Devido ao dielétrico, o campo é reduzido de um fator κ, $E = E_0/\kappa$. Lembrando que $\epsilon_0\kappa = \epsilon$ chegamos a

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\,\widehat{r}.$$

(b) A diferença de potencial entre as cascas esféricas é

$$\Delta V = -\int_{2a}^{a} \frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) = \frac{Q}{8\pi\epsilon a}.$$

A capacitância é

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = 8\pi\epsilon a.$$

(c) A densidade de corrente $\vec{J}$ e a corrente I entre as esferas são dadas por

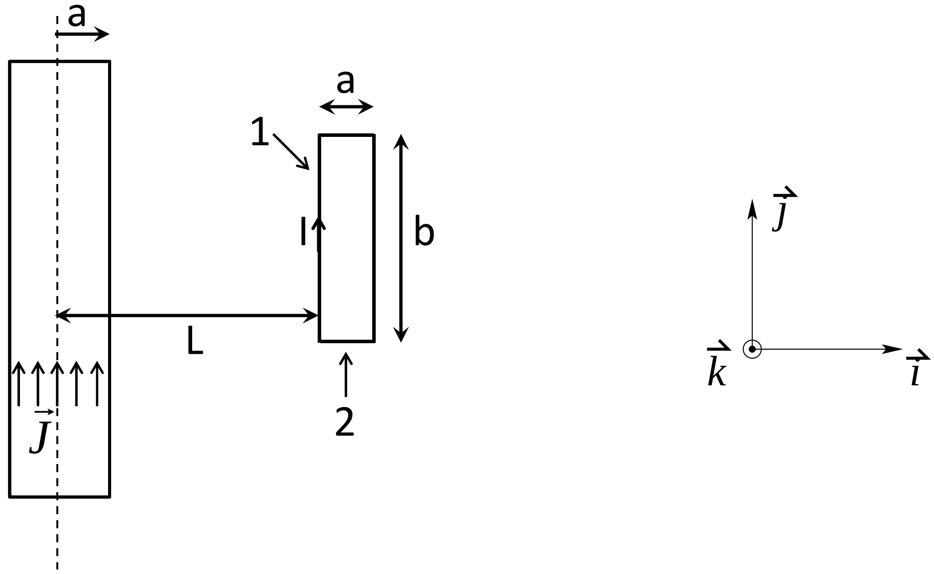
$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{Q\sigma}{4\pi\epsilon}\frac{1}{r^2}\,\widehat{r} \Longrightarrow I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = J(r)4\pi r^2 = \frac{Q\sigma}{\epsilon}$$

Finalmente, a resistência é

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{8\pi\sigma a}.$$

Questão 3

Um cilindro condutor muito longo de seção reta circular de raio a é percorrido por uma densidade de corrente uniforme J. Ao lado do cilindro, encontra-se uma espira retangular de lados a e b, percorrida por uma corrente I, conforme a figura. Considere conhecido que, na região exterior ao cilindro, o campo magnético devido ao cilindro é dado por $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 J a^2}{2\rho}\widehat{\varphi}$, onde ρ é a distância até o eixo do cilindro.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético devido unicamente ao cilindro, num ponto do espaço interior ao cilindro ($\rho < a$).

(b) (1,5 ponto) Calcule o vetor força magnética (devido ao campo do cilindro) sobre os lados 1 e 2 da espira. Forneça as direções das forças em termos dos versores $\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$, indicados na figura.

Solução da questão 3

(a) A lei de Ampère fornece

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Longrightarrow B2\pi\rho = \mu_0 J\pi\rho^2 \Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 J\rho}{2}\widehat{\varphi},$$

onde o contorno de integração C é um círculo de raio ρ, coaxial com o cilindro.

(b) A <u>força magnética sobre o lado 1</u> é

$$\vec{F}_1 = \int I d\vec{\ell}\times\vec{B} = I(b\,\vec{\jmath})\times(-B(L)\,\vec{k}) \Longrightarrow \vec{F}_1 = -Ib\frac{\mu_0 Ja^2}{2L}\,\vec{\imath} = -\frac{\mu_0 JIba^2}{2L}\,\vec{\imath}.$$

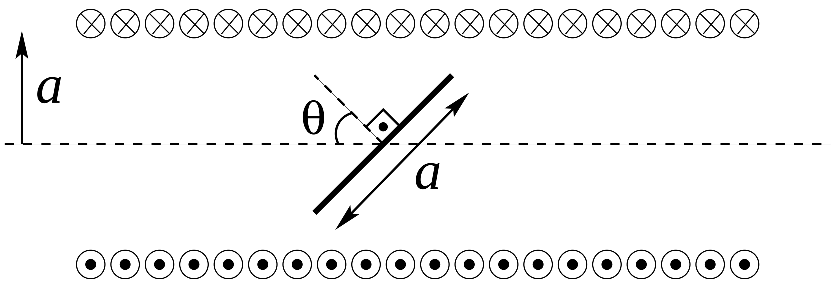
A <u>força magnética sobre o lado 2</u> é

$$\vec{F}_2 = \int I d\vec{\ell}\times\vec{B} = \int_L^{L+a} I(-d\rho\,\vec{\imath})\times(-B(\rho)\,\vec{k})$$

$$\Longrightarrow \vec{F}_2 = -I\int_L^{L+a}\frac{\mu_0 Ja^2}{2\rho}d\rho\,\vec{\jmath} = -\frac{\mu_0 JIa^2}{2}\ln\left(\frac{L+a}{L}\right)\vec{\jmath}.$$

Questão 4

Um solenoide muito longo (infinito) de seção reta circular de raio a tem n espiras por unidade de comprimento. Dentro do solenoide existe uma espira circular, de raio $a/2$ e resistência R, centrada no eixo do solenoide e fazendo um ângulo θ com esse eixo (vide figura). Uma corrente que varia no tempo da forma $I(t) = I_0 e^{kt}$ (I_0 e k são constantes positivas) percorre o solenoide. Dado: o módulo do campo magnético dentro do solenoide é $B = \mu_0 n I$.



(a) (1,0 ponto) Calcule a indutância mútua desse sistema.

(b) (1,0 ponto) Para a espira fixa (θ constante) calcule a corrente induzida na espira.

(c) (0,5 ponto) Para $\theta = 0$ (espira perpendicular ao eixo do solenoide) calcule o módulo do campo elétrico induzido na espira.

Solução da questão 4

(a) O fluxo magnético através da espira é

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu_0 n I \pi \frac{a^2}{4} \cos\theta.$$

A indutância mútua é

$$M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 n \pi a^2 \cos\theta}{4}.$$

(b) Denotando $\mathcal{E}$ a força eletromotriz, a corrente induzida é

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{M}{R}\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 n \pi a^2 \cos\theta k I_0 e^{kt}}{4R}.$$

(c) A integral de linha do campo elétrico na espira é igual à fem $\mathcal{E}$. Usando a fem calculada no item (b) com $\theta = 0$ obtemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi \frac{a}{2} E = \mathcal{E} = \frac{\mu_0 n \pi a^2 k I_0 e^{kt}}{4} \Longrightarrow E = \frac{\mu_0 n a k I_0 e^{kt}}{4}.$$

Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j} \frac{q_i\, q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2},$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = JA,$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \quad dR = \rho\frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0\vec{H},$$

$$\vec{B}_m = \mu_0\vec{M}, \quad \vec{M} = \chi_m\vec{H}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2\phi_{espira} = M_{21}I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2},$$

$$u = \frac{B^2}{2\mu}, \quad \mu = \kappa_m\mu_0 = (1 + \chi_m)\mu_0, \quad \int \frac{dx}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a(ax+b)}.$$