Física III - 4320301

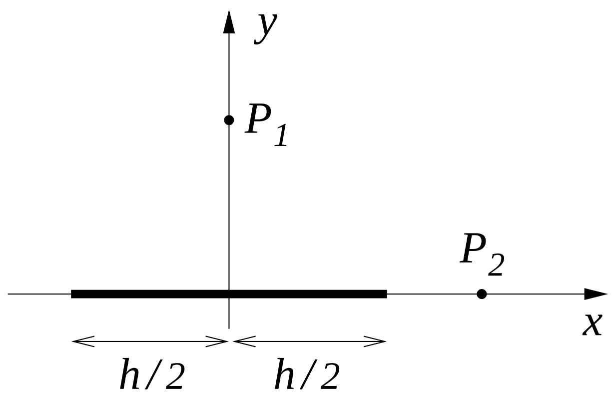
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA P1

11 de abril de 2013

Questão 1

Considere um bastão de comprimento h e carregado com densidade linear uniforme de carga λ disposto conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo elétrico no ponto P_1 de coordenadas $(0, y, 0)$, para $y > 0$.

(b) (1,0 ponto) Calcule o potencial elétrico no ponto P_2 de coordenadas $(x, 0, 0)$, para $x > h/2$.

(c) (0,5 ponto) A partir do potencial calcule a componente x do campo elétrico no ponto P_2 de coordenadas $(x, 0, 0)$, para $x > h/2$.

Solução da questão 1

(a) Por simetria, o campo elétrico sobre o semi-eixo y positivo só tem a componente y.

$$\vec{E}(0,y) = E_y(0,y)\vec{\jmath} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{y}{r^3}dq\,\vec{\jmath},$$

onde $r = \sqrt{x'^2 + y^2}$ e x' é a coordenada do elemento $dq = \lambda dx'$. Portanto,

$$\vec{E}(0,y) = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{dx'}{(x'^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{\jmath} = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x'}{y^2\sqrt{x'^2+y^2}}\right]_{-h/2}^{h/2}\vec{\jmath} = \frac{\lambda h}{2\pi\epsilon_0\, y\sqrt{h^2+4y^2}}\,\vec{\jmath}.$$

(b) O potencial elétrico sobre o semi-eixo x positivo é

$$V(x,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{r}dq\,,$$

onde $r = x - x'$ e x' é a coordenada do elemento $dq = \lambda dx'$. Assim,

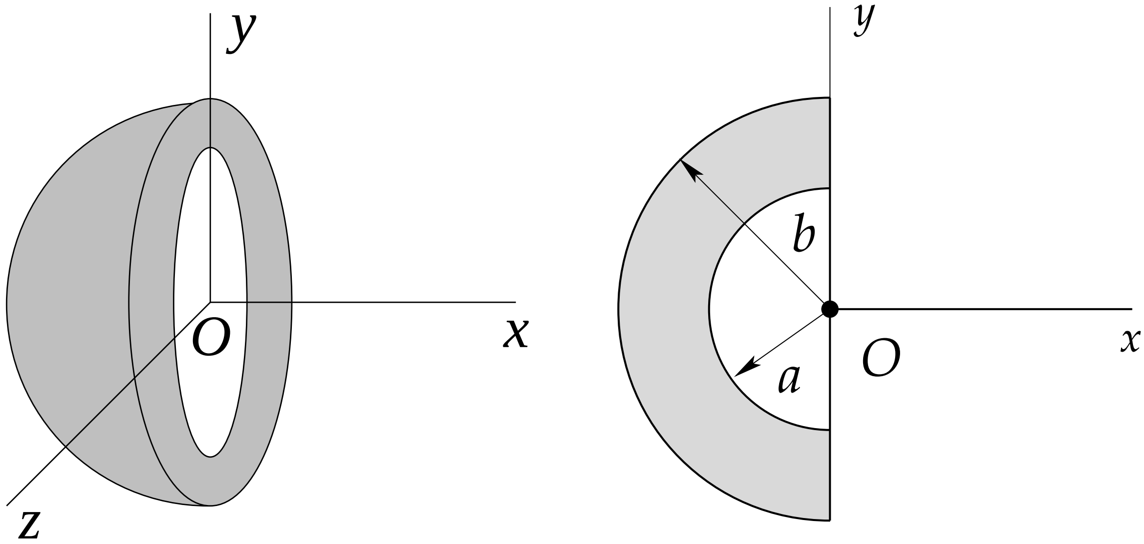
$$V(x,0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\lambda}{x-x'}dx' = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln(x-x')\,\Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{2x+h}{2x-h}\right).$$

(c) A componente x do campo elétrico é

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2}{2x+h} - \frac{2}{2x-h}\right) = \frac{\lambda\, h}{\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{4x^2-h^2}\right).$$

Questão 2

Uma camada semiesférica isolante de raio interno a e externo b tem uma densidade volumétrica de carga que decresce com o inverso da distância r ao centro O segundo $\rho(r) = A/r$.



(a) (1,0 ponto) Determine a carga total da camada semi-esférica.

(b) (1,0 ponto) Determine o potencial elétrico no centro O da camada semiesférica. Adote potencial nulo no infinito.

(c) (0,5 pontos) Se uma carga pontual q com o mesmo sinal da constante A da densidade volumétrica de carga é solta no centro O, qual é a velocidade final $\vec{v}_f$ que ela atinge?

Dados do problema: A, a, b, q e m.

Solução da questão 2

(a) Carga de uma semicamada elementar de raio r e espessura dr é

$$dq = \rho dV = \left(\frac{A}{r}\right)(2\pi r^2 dr) = 2\pi A r dr.$$

Carga total

$$Q = \int dq = 2\pi A \int_a^b r dr = \pi A(b^2 - a^2).$$

(b) Potencial no centro O

$$V_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{2\pi A r dr}{r} = \frac{A}{2\epsilon_0}\int_a^b dr = \frac{A}{2\epsilon_0}(b-a).$$

(c) Conservação de energia

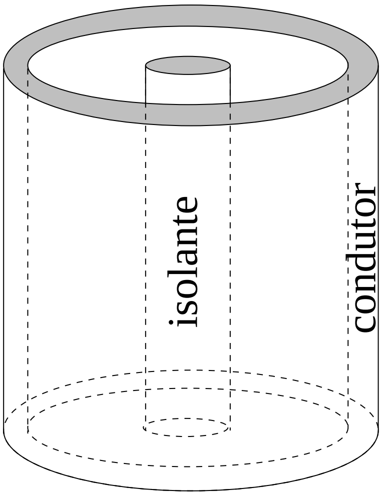
$$K_f + qV_\infty = 0 + qV_O = \frac{qA}{2\epsilon_0}(b-a)$$

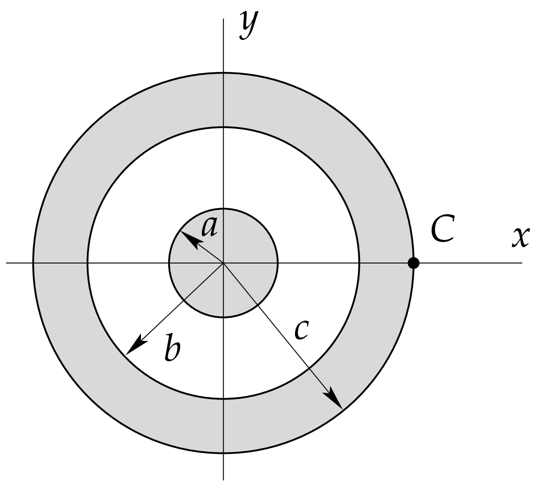
Velocidade final

$$\vec{v}_f = \sqrt{\frac{2V_O}{m}}\,\vec{\imath} = \left[\frac{qA(b-a)}{m\epsilon_0}\right]^{1/2}\,\vec{\imath}.$$

Questão 3

Um cilindro circular muito longo de raio a, isolante, com densidade volumétrica uniforme de cargas igual a $\rho > 0$, é concêntrico a uma camada cilíndrica condutora de raio interno b e raio externo c com carga total zero. O campo elétrico no ponto C imediatamente fora do condutor vale $E_1\vec{\imath}$. Nos ítens abaixo despreze o campo elétrico e as cargas nas extremidades do cilindro e da camada cilíndrica.





(a) (1,0 ponto) Calcule o campo elétrico para $r < a$ e $b < r < c$.

(b) (0,5 pontos) Calcule o campo elétrico para $r > c$.

(c) (1,0 ponto) Calcule as densidades superficiais de carga σ_c e σ_b nas superfícies externa e interna da camada cilíndrica condutora em função de E_1, ϵ_0, b e c.

Solução da questão 3

(a) Pela simetria cilíndrica $\vec{E} = E(r)\widehat{r}$, onde $\widehat{r}$ é o vetor unitário axialmente radial. Aplicando a lei de Gauss a uma superfície gaussiana cilíndrica S de raio r e comprimento L temos:

(i) para $r < a$

$$\Phi = E(r)(2\pi rL) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\left\{\pi r^2 L\right\}}{\epsilon_0}. \qquad \text{Logo,} \qquad E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}r;$$

(ii) para $b < r < c$ (interior do condutor) o campo é nulo

$$\vec{E} = \vec{0} \qquad (b < r < c).$$

(b) Como a carga total da camada cilíndrica condutora é zero o campo elétrico para $r > c$ é igual ao campo gerado pelo cilindro isolante.

$$\Phi = E(r)(2\pi rL) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho\left\{\pi a^2 L\right\}}{\epsilon_0}. \qquad \text{Logo,} \qquad E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\frac{a^2}{r};$$

(c) A densidade superficial de carga num condutor obedece $\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$, onde $\vec{n}$ é o versor normal à superfície apontando para fora do condutor. Logo

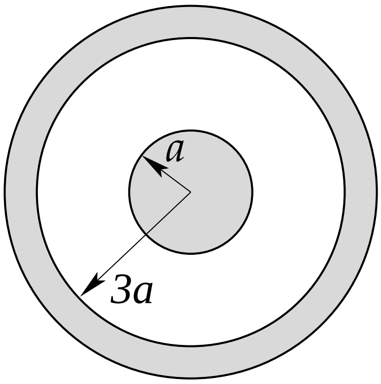
$$\sigma_c = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{\imath} = \epsilon_0 E_1.$$

A carga total no condutor é zero. Denotando a altura do cilindro H, temos

$$2\pi bH\sigma_b = -2\pi cH\sigma_c \Longrightarrow \sigma_b = -\frac{c}{b}\sigma_c = -\frac{c}{b}\epsilon_0 E_1\,.$$

Questão 4

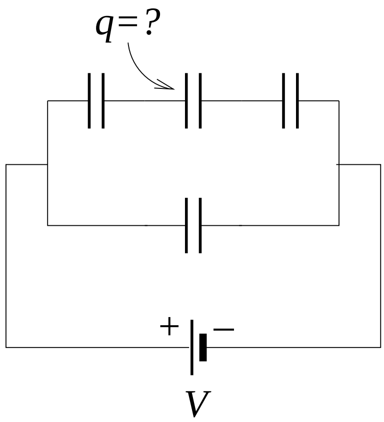
Um capacitor esférico é formado por uma esfera interna de raio a e uma camada esférica concêntrica de raio interno $3a$, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule a capacitância C deste capacitor no vácuo a partir da definição.

(b) (0,5 ponto) Como se altera a capacitância se o espaço entre os condutores for preenchido com um material de constante dielétrica κ?

(c) (1,0 ponto) Quatro capacitores de capacitância C, inicialmente descarregados, foram associados e uma diferença de potencial V foi aplicada, conforme a figura. Determine a carga q na placa indicada na figura. Dê sua resposta em termos de C e V.



Solução da questão 4

(a) O campo tem simetria esférica, ou seja $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Sem o dielétrico, a lei de Gauss, tomando uma superfície S esférica de raio r com $a < r < 3a$, concêntrica com as cascas esféricas, fornece

$$\oint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \oint_S E_0 dA = E_0 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Longrightarrow E_0(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}.$$

O módulo da diferença de potencial entre as cascas é dada por

$$|V| = \int_a^{3a} E(r)dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\Big|_a^{3a} = \frac{Q}{6\pi\epsilon_0\, a}$$

A capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{|V|} = 6\pi\epsilon_0\, a$$

(b) Com o dielétrico a nova capacitância $C' = \kappa C$. Isto ocorre porque com o dielétrico a diferença de potencial diminui de um fator κ. Devido a esta diminuição a nova capacitância $C' = Q/V' = \kappa Q/V = \kappa C$.

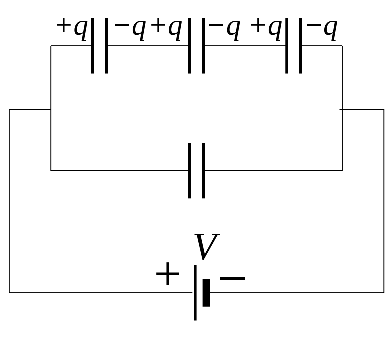
(c) O conjunto de 3 capacitores em série tem uma capacitância equivalente dada por

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \frac{1}{C} \Longrightarrow C_{eq} = \frac{C}{3}.$$

Como este conjunto está submetido a uma diferença de potencial V, a carga nas placas será:

$$q = C_{eq}V = \frac{CV}{3}.$$

Devido à conservação de carga, essa será a carga presente na placa indicada.



Formulário

$$\vec{F} = \frac{qq'(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}, \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r},$$

$$p = qd, \quad \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}, \quad U = -\vec{p}\cdot\vec{E}, \quad \Phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0},$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V,$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \quad U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i\,q_j}{r_{ij}}, \quad C = Q/V, \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots,$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa, \quad u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2, \quad E = \frac{E_0}{\kappa},$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}, \quad u = \frac{\epsilon}{2}E^2, \quad \oint \epsilon_0\kappa\vec{E}\cdot d\vec{A} = q_{int-liv}.$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+c)^{3/2}} = \frac{t}{c\sqrt{t^2+c}}, \quad \int\frac{dt}{at+b} = \frac{1}{a}\ln(at+b), \quad \ln(a/b) = \ln a - \ln b.$$

$$d\mathcal{V} = dxdydz, \quad d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr, \quad d\mathcal{V} = 2\pi rhdr.$$