Física III - 4320301

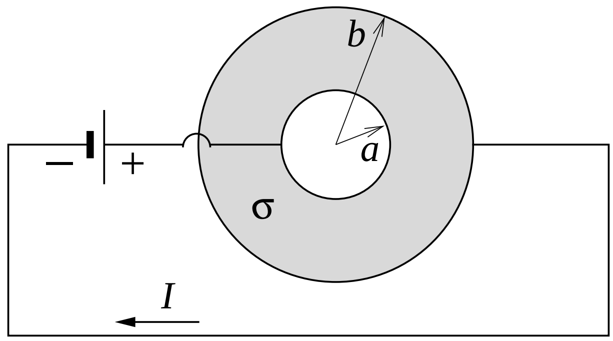
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA P2

16 de maio de 2013

Questão 1

Considere dois eletrodos esféricos concêntricos de raios a e b, conforme a figura. O meio resistivo entre os eletrodos é homogêneo com condutividade σ. Uma corrente I flui do eletrodo interno de raio a para o eletrodo externo de raio b através do meio resistivo.



(a) (1,0 ponto) Calcule, em função da corrente I, o vetor densidade de corrente no meio resistivo a uma distância r do centro dos eletrodos ($a < r < b$).

(b) (1,0 ponto) Calcule a resistência do sistema ôhmico em função de a, b e σ.

(c) (0,5 ponto) Qual o valor da diferença de potencial entre os eletrodos em função de a, b, σ e I?

Solução da questão 1

(a) A relação entre a densidade de corrente $\vec{J}$ e a corrente I é

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

onde S é uma superfície esférica concêntrica com as esferas condutoras. Por simetria $\vec{J} = J(r)\widehat{r}$, portanto

$$I = J(r) \oint_S \widehat{r} \cdot d\vec{A} \Longrightarrow I = J(r) 4\pi r^2 \Longrightarrow \boxed{\vec{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\widehat{r}}.$$

(b) Podemos considerar a região entre as cascas condutoras como uma superposição de cascas esféricas concêntricas de raio interno r e raio externo $r + dr$. Como a espessura dr destas cascas é infinitesimal, as suas superfícies interna e externa têm praticamente a mesma área e podemos calcular sua resistência dR através da expressão

$$dR = \frac{1}{\sigma A(r)} dr \ , \quad \text{onde} \quad A(r) = 4\pi r^2 \, .$$

A resistência total é dada por

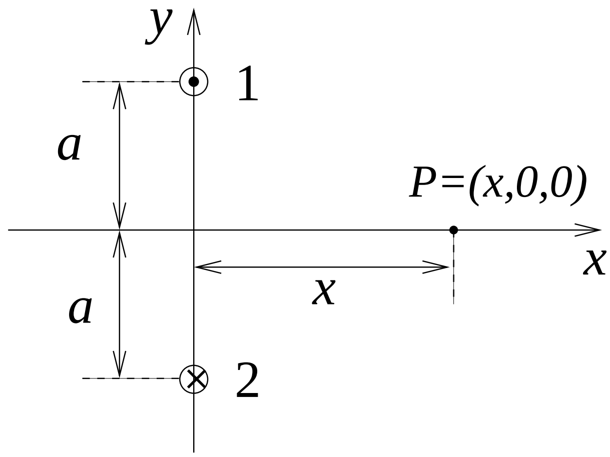
$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma A(r)} dr = \frac{1}{4\pi\sigma} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \Longrightarrow \boxed{R = \frac{b-a}{4\pi\sigma \, ab}}.$$

(c) A diferença de potencial entre os eletrodos pode ser calculada através de

$$V = RI \Longrightarrow \boxed{V = \frac{(b-a)I}{4\pi\sigma \, ab}}.$$

Questão 2

Dois fios 1 e 2, infinitos e paralelos, separados pela distância $2a$, conduzem no vácuo, cada um, uma corrente I, em sentidos opostos, conforme a figura.



(a) (0,5 ponto) Usando a lei de Ampère, calcule o vetor campo magnético produzido por um fio infinito por onde passa uma corrente i a uma distância r do fio.

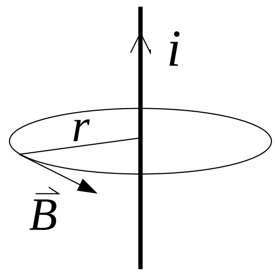
(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelos dois fios no ponto $P = (x, 0, 0)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule o vetor força por unidade de comprimento exercida no fio 2 pelo fio 1.

Solução da questão 2

(a) A lei de Ampère fornece

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, i$$

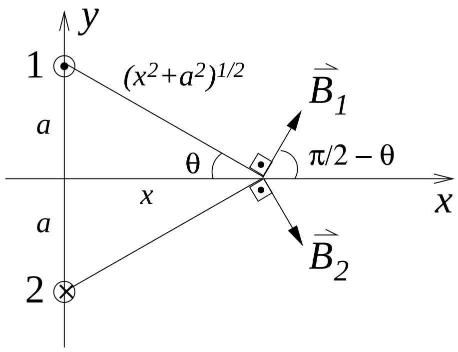


Como $\vec{B}$ é paralelo a $d\vec{\ell}$ e $B = B(r)$ podemos escrever

$$\oint B\, d\ell = B(r) \oint d\ell = B 2\pi r = \mu_0\, i \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r}$$

$$\boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi r}\,\widehat{\theta}}$$

(b) No ponto P as componentes y de $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ se cancelam (veja a figura).



Usando o resultado do item (a) obtemos

$$\vec{B}(P) = 2B_1 \cos(\pi/2 - \theta)\vec{\imath} = 2B_1\, \mathrm{sen}(\theta)\vec{\imath} = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi(x^2+a^2)^{1/2}}\frac{a}{(x^2+a^2)^{1/2}}\vec{\imath}$$

$$\boxed{\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I a}{\pi(x^2+a^2)}\vec{\imath}}.$$

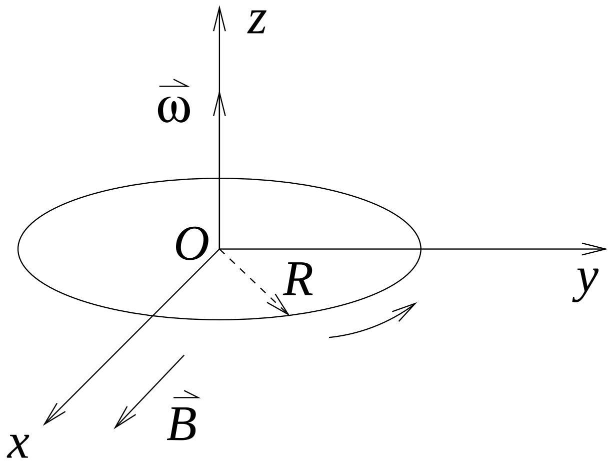
(c) A força que o fio 1 exerce sobre um elemento $d\vec{\ell}$ do fio 2 é $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}_1$. A força sobre um trecho de comprimento L do fio 2 é

$$\vec{F} = I\int d\vec{\ell} \times \vec{B}_1 = -I\int d\ell B_1\,\vec{\jmath} = -ILB_1\,\vec{\jmath} = -IL\frac{\mu_0\, I}{4\pi a}\,\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0\, I^2}{4\pi a}\,\vec{\jmath}}.$$

Questão 3

Um anel fino de raio R, carregado com densidade linear de carga $\lambda > 0$, gira em torno de um eixo z que passa pelo seu centro com uma velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, conforme a figura. Atua na região um campo magnético externo homogêneo $\vec{B} = B\vec{\imath}$.



(a) (0,5 ponto) Calcule a corrente i associada ao movimento do anel em função de λ, ω e R. Qual é o sentido da corrente?

(b) (1,0 ponto) Calcule o vetor torque que o campo externo $\vec{B}$ exerce sobre o anel.

(c) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}_O$ produzido pelo anel no seu centro.

Solução da questão 3

(a) A corrente pode ser calculada através da quantidade de carga que passa através de uma área igual à seção reta do anel.

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda R \Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\lambda R \omega \Delta t}{\Delta t} = \lambda R \omega.$$

Ou, mais diretamente,

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} = \lambda v = \lambda \omega R.$$

<u>A corrente tem o sentido da rotação do anel</u>.

(b) O momento magnético da espira é

$$\vec{\mu} = iA\vec{k} = (\lambda\omega R)(\pi R^2)\vec{k} = \lambda\omega\pi R^3\vec{k}.$$

O torque sobre a espira é

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \lambda\omega\pi R^3 B\vec{\jmath}.$$

(c) O campo magnético no centro da espira pode ser calculado através da lei de Biot-Savart.

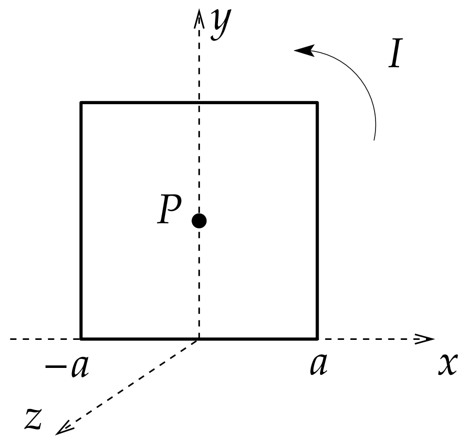
$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}; \quad d\vec{\ell} \times \widehat{r} = dl\vec{k} \Longrightarrow \vec{B}_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\oint d\ell\vec{k} = \frac{\mu_0 i}{2R}\vec{k}.$$

Como $i = \lambda\omega R$,

$$\boxed{\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 \lambda\omega}{2}\vec{k}}.$$

Questão 4

(I) Considere uma espira quadrada de lado $2a$ percorrida no sentido anti-horário por uma corrente I. A espira se encontra no plano xy, conforme a figura.



(a) (1,0 ponto) Calcule o vetor campo magnético produzido pelo segmento da espira ao longo do eixo x no centro da espira (ponto $P = (0, a, 0)$).

(b) (0,5 ponto) Calcule o vetor campo magnético total produzido pelos quatro segmentos no centro da espira.

(II) (1,0 ponto) Usando a lei de Ampère calcule o vetor campo magnético no interior de um condutor cilíndrico infinito de raio R por onde passa uma corrente I uniformemente distribuida através de sua seção reta.

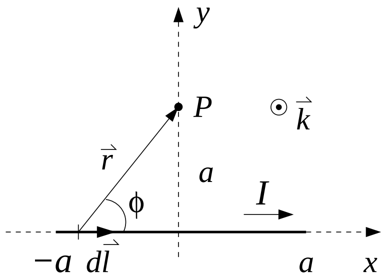
Solução da questão 4

(I) Campo magnético no centro da espira quadrada.

(a) O campo magnético produzido no ponto P pelo pedaço $d\vec{\ell}$ do fio sobre o eixo x é dado por

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3},$$

onde $d\vec{\ell} = dx \, \vec{\imath}$ e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Da figura obtemos $d\vec{\ell} \times \vec{r} = dx \, r \, \text{sen}\phi \, \vec{k}$ e $\text{sen}\phi = a/\sqrt{x^2 + a^2}$. Assim,

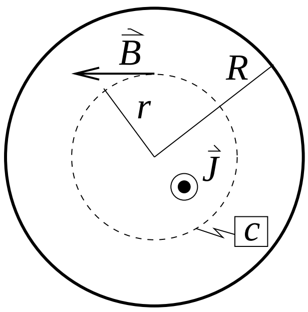
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I \, a}{4\pi} \frac{dx \, \vec{k}}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \Longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \, I \, a}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \, \vec{k} = \frac{\mu_0 \, I \, a}{2\,\pi} \frac{a}{a^2\sqrt{a^2 + a^2}} \, \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{2\sqrt{2}\,\pi\, a} \, \vec{k}}.$$

(b) O campo total no centro da espira é quatro vezes o valor obtido no item (a)

$$\boxed{\vec{B} = \frac{2\mu_0 \, I}{\sqrt{2}\,\pi\, a} \, \vec{k}}.$$

(II) Campo dentro do condutor cilíndrico.



A lei de Ampère afirma que $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$. Para $r \leq R$,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B d\ell = B \oint_C d\ell = B 2\pi r = \mu_0 I(r) = \mu_0 J(r) \pi r^2 = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \mu_0 \frac{I r^2}{R^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \, \hat{\theta}}$$

Formulário

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V,$$

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2, \quad \oint \epsilon_0 \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{int-liv}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = n|q| v_d A, \quad \vec{J} = n|q| \vec{v}_d, \quad \rho = \frac{1}{\sigma},$$

$$I = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A}, \quad dR = \rho \frac{d\ell}{A}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A}, \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}, \quad \int \frac{dx}{(x^2 + c^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2 \sqrt{x^2 + c^2}}.$$