Física III - 4320301

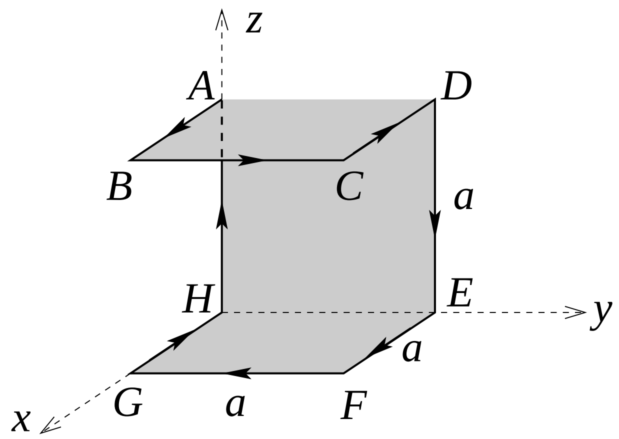
Escola Politécnica - 2013

GABARITO DA P3

20 de junho de 2013

Questão 1

Considere uma superfície S formada por três quadrados de lado a: $ABCD$, $DEHA$ e $EFGH$, como é mostrado na figura. O quadrado $ABCD$ é paralelo ao plano xy. Na região da superfície S existe um campo magnético uniforme $\vec{B}$.



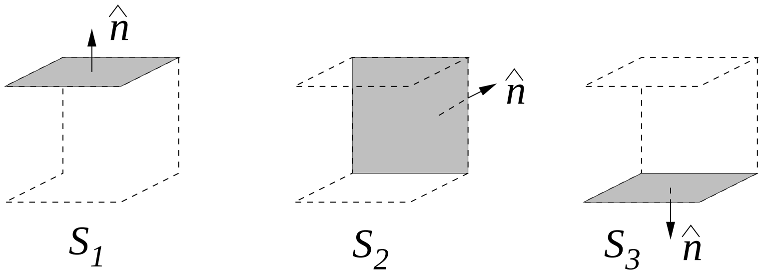
(a) (1,0 ponto) Calcule o fluxo magnético através da superfície S para $\vec{B} = B_z(t)\hat{k}$.

(b) (0,5 ponto) Calcule o fluxo magnético através da superfície S para $\vec{B} = B_x(t)\hat{\imath}$.

(c) (1,0 ponto) Considere $\vec{B} = B_x(t)\hat{\imath}$ com $B_x(t) = B_0 \cos(wt)$. Calcule a integral de linha do campo elétrico ao longo do caminho fechado $\gamma \equiv ABCDEFGHA$ na fronteira de S percorrido no sentido indicado na figura.

Solução da questão 1

(a) Vamos denotar os quadrados $ABCD$, $DEHA$ e $EFGH$ como S_1, S_2 e S_3, respectivamente. Com a borda da superfície orientada como na figura, as normais dos 3 quadrados têm as direções indicadas abaixo.



O fluxo magnético através de S é

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \widehat{n} dS = \int_{S_1} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS + \int_{S_2} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS + \int_{S_3} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS.$$

Temos

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS = B_z a^2, \qquad \int_{S_2} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS = 0, \qquad \int_{S_3} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS = -B_z a^2.$$

$$\Longrightarrow \Phi_m = B_z a^2 + 0 - B_z a^2 = 0.$$

(b) Para $\vec{B} = B_x(t)\widehat{x}$, somente S_2 contribui

$$\Phi_m = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS = -a^2 B_x(t).$$

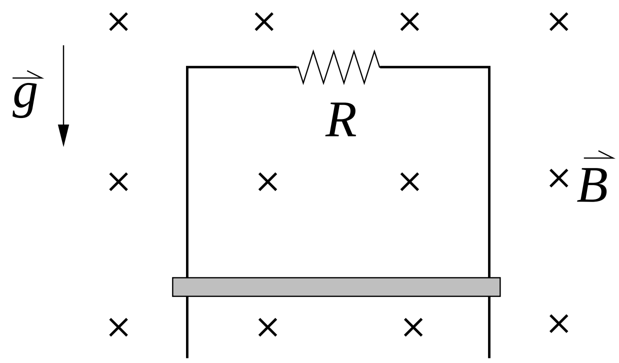
(c) A integral de linha de $\vec{E}$ ao longo de γ pode ser calculada através da lei de Faraday.

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S_2} \vec{B} \cdot \widehat{n} dS = \frac{d}{dt}(a^2 B_x(t)) = \frac{d}{dt}(a^2 B_0 \cos \omega t) = -a^2 \omega B_0 \,\mathrm{sen} \omega t.$$

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -a^2 \omega B_0 \,\mathrm{sen} \omega t}.$$

Questão 2

A barra condutora de comprimento ℓ e massa m cai no campo gravitacional escorregando sem atrito sobre um fio condutor na forma de um U ligado a um resistor de resistência R, conforme a figura. O conjunto forma um circuito na vertical que se encontra na presença de um campo magnético uniforme $\vec{B}$ na direção perpendicular ao plano do circuito.



(a) (0,5 ponto) Qual é o sentido da corrente induzida no circuito? Justifique.

(b) (0,5 ponto) Calcule a f.e.m. induzida no circuito em termos do módulo $v(t)$ da velocidade instânea da barra na direção vertical.

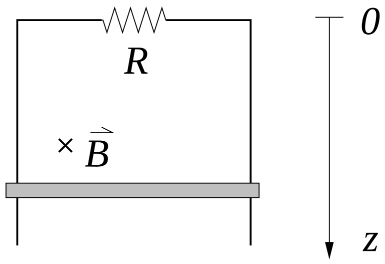
(c) (1,0 ponto) Determine a <u>velocidade terminal</u> v_{term} da barra e a <u>corrente</u> I_{term} que passa no circuito quando ela se encontra nesta velocidade.

(d) (0,5 ponto) Calcule a potência dissipada pelo sistema na situação do item (c) e mostre que ela é igual à potência fornecida ao sistema pelo campo gravitacional.

Solução da questão 2

(a) Pela lei de Lenz a corrente tem o sentido anti-horário.

(b) A f.e.m. pode ser calculada através da lei de Faraday. Colocando o eixo z como na figura abaixo obtemos



$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{d(B\ell z)}{dt} = Bv\ell.$$

(c) A força magnética sobre a barra é $\vec{F}_m = I\vec{\ell}\times\vec{B} = -I\ell B\widehat{e}_z$. A segunda lei de Newton fornece

$$ma = -I\ell B + mg \Longrightarrow a = g - \frac{B^2\ell^2 v}{mR} \Longrightarrow \boxed{v_{term} = \frac{mRg}{B^2\ell^2}}.$$

A corrente terminal é obtida através de

$$RI_{term} = Bv_{term}\ell \Longrightarrow \boxed{I_{term} = \frac{mg}{B\ell}}.$$

(d) A potência dissipada no resistor é

$$P_{diss} = R(I_{term})^2 = R\left(\frac{mg}{B\ell}\right)^2.$$

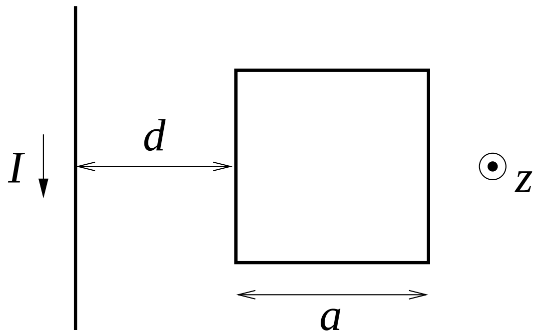
A potência fornecida pelo campo gravitacional é

$$P_{grav} = mgv_{term} = mg\frac{mRg}{B^2\ell^2} = R\left(\frac{mg}{B\ell}\right)^2.$$

Os dois resultados são iguais.

Questão 3

Uma espira condutora quadrada de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor infinito percorrido por uma corrente I, a uma distância d.



(a) (1,5 ponto) Calcule a indutância mútua do sistema. Escolha a normal à espira no sentido positivo do eixo z. Obs: o campo magnético a uma distância r de um fio infinito percorrido por uma corrente I é $\mu_0 I/(2\pi r)$.

(b) (1,0 ponto) Para $I = \alpha t$ com $\alpha > 0$, calcule a corrente induzida na espira quadrada e determinar seu sentido (justifique sua resposta).

Solução da questão 3

(a) A indutância mútua é dada por

$$M = \frac{\Phi_{21}^{total}}{I},$$

onde Φ_{21}^{total} é o fluxo do campo magnético produzido pelo fio sobre a espira. Escolhemos a normal da espira na direção positiva do eixo z (veja a figura).

$$\Phi_{21}^{total} = \int_{esp.} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{d}^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \Longrightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}.$$

(b) A f.e.m. $\mathcal{E}$ é

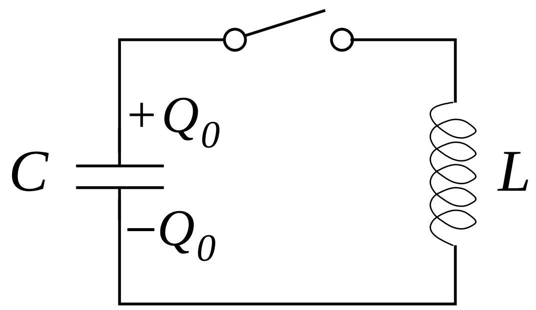
$$\mathcal{E} = -\frac{\Phi_{21}^{total}}{dt} = -M\frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 a \alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \Longrightarrow \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 a \alpha}{2\pi R} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)}.$$

Com a escolha da normal da espira na direção positiva do eixo z o sentido de percurso positivo é o anti-horário. O resultado acima fornece $I < 0$ e portanto a corrente circula a espira no <u>sentido horário</u>.

<u>Alternativamente, podemos determinar o sentido da corrente através da lei de Lenz.</u> À medida que o tempo passa o campo do fio, que tem direção $\widehat{k}$, aumenta. Isto provoca o aumento do fluxo através da espira. A corrente induzida vai se opor a este aumento gerando um campo $\vec{B}_{ind}$ na direção $-\widehat{k}$. Para isto a corrente na espira deve ter o <u>sentido horário</u>.

Questão 4

Considere o circuito LC abaixo com cargas $+Q_0$ e $-Q_0$ nas placas do capacitor. A chave é fechada no instante $t = 0$.



(a) (0,5 ponto) Escreva a equação diferencial da carga $Q(t)$ na placa superior do capacitor. Explicite a condição inicial para $Q(t)$.

(b) (1,0 ponto) Determine a carga $Q(t)$ na placa superior e a corrente $I(t)$ no circuito para $t > 0$ e que satisfazem as condições iniciais.

(c) (0,5 ponto) O indutor é formado por um solenóide muito longo de comprimento ℓ e diâmetro $2a$ com N voltas de fio uniformemente enroladas em um núcleo de plástico (a permeabilidade do plástico é igual à do vácuo). Calcule a indutância.

(d) (0,5 ponto) Qual é a nova frequência angular ω' de oscilação se o núcleo de plástico for substituído por um núcleo de ferro com permeabilidade magnética $100\mu_0$? Expresse sua resposta em termos da frequência angular ω do circuito com o solenóide com núcleo de plástico.

Solução da questão 4

(a) A equação diferencial do circuito é

$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{e} \quad I = -\frac{dQ}{dt} \Longrightarrow L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \Longrightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Colocando $\omega = \sqrt{1/LC}$ obtemos

$$\boxed{\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega^2 Q = 0} \quad \text{com a condição inicial} \quad \boxed{Q(0) = Q_0}.$$

(b) A solução geral da equação encontrada no item (b) é

$$Q(t) = A\cos(\omega t) + B\,\text{sen}(\omega t)$$
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

Determinamos A e B usando as condições iniciais

$$I(0) = 0 \Rightarrow B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$Q(0) = Q_0 \quad \text{e} \quad B = 0 \Rightarrow A = Q_0.$$

$$\Longrightarrow \boxed{Q(t) = Q_0\cos(\omega t)} \quad \text{e} \quad \boxed{I(t) = -Q_0\omega\,\text{sen}(\omega t)}.$$

(c) O campo do solenóide é

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell}.$$

O fluxo total através do solenóide é

$$\Phi_m = B \cdot \pi a^2 \cdot N = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell} I \Longrightarrow \boxed{L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{\ell}}.$$

(d) A nova frequência de oscilação é

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{L'C}} = \sqrt{\frac{\ell}{100\mu_0 N^2 \pi a^2 C}} \Longrightarrow \boxed{\omega' = \frac{\omega}{10}},$$

onde a nova indutância L' foi obtida a partir da antiga fazendo $\mu_0 \longrightarrow 100\mu_0$ na expressão para L no item (c).

Formulário

$$C = Q/V, \quad U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}, \quad V = RI, \quad V = \mathcal{E} - Ir, \quad P = VI = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}, \quad \vec{\mu} = I\vec{A},$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \widehat{r}}{r^2}, \quad \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int},$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}, \;\; \vec{B}_m = \mu_0 \vec{M}, \;\; \vec{M} = \chi_m \vec{H} = \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \;\; \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m,$$

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = (1+\chi_m)\vec{B}_0, \quad \mu = K_m \mu_0 = (1+\chi_m)\mu_0, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

$$\Phi^{total} = N\phi_{espira} = LI, \quad \Phi_{21}^{total} = N_2 \phi_{espira} = M_{21} I_1, \quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad U = \frac{LI^2}{2}, \quad u = \frac{B^2}{2\mu}.$$